

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y  
TEORÍA DE ESTRUCTURAS



PROYECTO DE FIN DE CARRERA

**MODELO DE GURSON APLICADO AL ANÁLISIS DEL  
ENSAYO DE EXPANSIÓN DE ANILLOS**

Ingeniería Industrial

Madrid, 2011

Manuel Moriche Guerrero

Dirigido por: Dra. Dña. Guadalupe Vadillo Martín



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y TEORÍA DE  
ESTRUCTURAS

Titulación: Ingeniería Industrial

Reunido el tribunal examinador en el día de la fecha, constituido por:

D. \_\_\_\_\_

D. \_\_\_\_\_

D. \_\_\_\_\_

para juzgar el proyecto de fin de carreratitulado:

## **MODELO DE GURSON APLICADO AL ANÁLISIS DEL ENSAYO DE EXPANSIÓN DE ANILLOS**

del alumno D. Manuel Moriche Guerrero

dirigido por D. Dra. Dña. Guadalupe Vadillo Martín

ACORDÓ POR: \_\_\_\_\_ OTORGAR LA CALIFICACIÓN DE

\_\_\_\_\_

y, para que conste, se extiende firmada por los componentes del Tribunal, la presente diligencia.

Madrid, a \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2011

El Presidente:

El Secretario:

El Vocal:

Fdo. \_\_\_\_\_

Fdo. \_\_\_\_\_

Fdo. \_\_\_\_\_

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y TEORÍA DE  
ESTRUCTURAS

**MODELO DE GURSON APLICADO AL ANÁLISIS DEL ENSAYO DE  
EXPANSIÓN DE ANILLOS**

REALIZADO POR:

Manuel Moriche Guerrero

DIRIGIDO POR:

Dra. Dña. Guadalupe Vadillo Martín

DEPARTAMENTO DE: DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS  
Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

TITULACIÓN: Ingeniería Industrial

Madrid, 2011



# Resumen

En este proyecto de fin de carrera se estudia el comportamiento mecánico de materiales en condiciones dinámicas. Los efectos termoviscoplasticos y de presencia de daño en el material bajo estudio se caracterizan mediante el modelo de Gurson y la ley de endurecimiento de Johnson Cook, siendo el modelo de Gurson el objeto principal de estudio de este proyecto.

La mayor carga a nivel técnico la ha llevado la implementación de la subrutina que caracteriza el comportamiento del material. El algoritmo implementado en la subrutina tiene un enfoque muy ingenieril. Se ha buscado ante todo la eficiencia del algoritmo mediante el uso de métodos semi-implícitos. La subrutina ha sido implementada en FORTRAN.

La configuración elegida para llevar a cabo las simulaciones es el ensayo de expansión de anillos, ya que reúne las condiciones dinámicas buscadas. El código de elementos finitos comercial utilizado es ABAQUS/Explicit.

Se presentan cuatro capítulos de contenido teórico, además, un capítulo con el contenido técnico de las simulaciones llevadas a cabo y, finalmente, un capítulo con conclusiones.





# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Acrónimos</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.3. Contenido . . . . .	2
<b>2. Plasticidad</b>	<b>5</b>
2.1. La teoría de la plasticidad . . . . .	5
2.1.1. Condición de consistencia . . . . .	7
2.2. El espacio de tensiones principales. Planos y superficies . . . . .	8
2.2.1. Eje hidrostático . . . . .	9
2.2.2. Planos octaédricos . . . . .	10
2.2.3. Planos meridionales . . . . .	10

2.3. Criterios de plastificación . . . . .	11
2.3.1. La función de plastificación . . . . .	11
2.3.2. Criterios de plastificación independientes de la tensión hidrostática .	12
2.3.3. Criterios de plastificación dependientes de la tensión hidrostática . .	15
<b>3. Mecánica del daño</b>	<b>19</b>
3.1. Campo de aplicación de la mecánica del daño . . . . .	19
3.2. Elemento volumétrico representativo . . . . .	22
3.3. Fracción de microvacíos en metales dúctiles . . . . .	22
<b>4. Modelo de Gurson</b>	<b>25</b>
4.1. Ecuaciones constitutivas . . . . .	25
4.2. Algoritmo de resolución . . . . .	28
4.2.1. Planteamiento del problema . . . . .	29
4.3. Efecto de la triaxialidad . . . . .	32
4.4. Implementación en ABAQUS . . . . .	33
<b>5. Caracterización de materiales a alta velocidad</b>	<b>37</b>
5.1. El test de Taylor . . . . .	37
5.2. El test de expansión de anillos . . . . .	39
5.2.1. Aspectos experimentales . . . . .	41
5.2.2. Historia del test de expansión de anillos . . . . .	41

---

<b>6. Simulaciones</b>	<b>43</b>
6.1. Descripción del modelo de elementos finitos . . . . .	43
6.1.1. Geometría y mallado . . . . .	43
6.1.2. Material . . . . .	46
6.1.3. Condiciones de contorno . . . . .	47
6.1.4. Valores iniciales . . . . .	48
6.2. Descripción de los casos analizados . . . . .	48
6.3. Resultados . . . . .	49
6.3.1. Validación de los análisis . . . . .	50
6.3.2. Resultados vinculados al ensayo de expansión de anillos . . . . .	52
6.3.3. Resultados vinculados al material . . . . .	62
<b>7. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>79</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	79
7.2. Trabajos futuros . . . . .	80
<b>A. Conceptos básicos</b>	<b>81</b>



# Índice de tablas

1.	Acrónimos . . . . .	XIV
2.	Notación complementaria . . . . .	XV
3.1.	Principios de equivalencia y autores . . . . .	22
5.1.	Historia del test de expansión de anillos . . . . .	42
6.1.	Propiedades del material . . . . .	47
6.2.	Valores iniciales . . . . .	48
6.3.	Escenarios estudiados en las simulaciones . . . . .	49
6.4.	Número de trozos obtenidos en cada simulación . . . . .	52
6.5.	Tiempo representado en cada etapa . . . . .	73



# Índice de figuras

1.1. Proceso de crecimiento y coalescencia de microvacíos [2] . . . . .	2
2.1. Criterio de plastificación del 0.2 % . . . . .	6
2.2. Comportamiento plástico con y sin endurecimiento por deformación . . . .	7
2.3. Espacio de tensiones principales y coordenadas de Haigh-Westergaard . . .	9
2.4. Espacio de tensiones principales. Planos meridionales . . . . .	11
2.5. Superficies de plastificación de Von Mises y de Tresca en el espacio de tensiones principales . . . . .	14
2.6. Vista normal al eje hidrostático de las superficies de plastificación de Von Mises (morado) y de Tresca (rosa) . . . . .	15
2.7. Superficies de plastificación de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager coincidente con las aristas exteriores y con las aristas interiores representadas en el espacio de tensiones principales . . . . .	17
2.8. Vista de la superficies de plastificación de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager coincidente con los outer apexes y con los inner apexes normal al eje hidrostático . . . . .	18
3.1. Nucleación de microvacíos por la presencia de partículas (decohesión y rotura) [2] . . . . .	20

3.2. Escalas para el estudio del daño material . . . . .	21
4.1. Diagrama de flujo de la subrutina VUMAT . . . . .	35
5.1. Simulación del test de Taylor [20] . . . . .	38
5.2. Simulación del test de Taylor [21] . . . . .	39
5.3. Esquema del ensayo de expansión de anillos [19] . . . . .	40
6.1. Geometría del modelo. Anillos y sección . . . . .	44
6.2. Detalle del mallado de los anillos . . . . .	45
6.3. Mallado de los anillos . . . . .	45
6.4. Ejemplo de malla con efecto de <i>hourglass</i> . . . . .	46
6.5. Condición de contorno . . . . .	48
6.6. Elementos cuyo error en el cálculo de la presión ( $p$ ) es mayor del 1 %. Caso con $R_i = 16$ , $V = 250ms^{-1}$ y $f_0 = 0,001$ . . . . .	51
6.7. Fragmentación del anillo con $R_i = 16mm$ . . . . .	53
6.8. Fragmentación del anillo con $R_i = 50mm$ . . . . .	54
6.9. $N$ frente a $f_0$ para distintas velocidades de expansión (Anillo con $R_i = 16mm$ )	55
6.10. Evolución de la variable $\bar{\sigma}$ en el caso $R_i = 16mm, V = 250ms^{-1}, f_0 = 0,001$	57
6.11. Evolución de la variable $\bar{\epsilon}^p$ en el caso $R_i = 16mm, V = 250ms^{-1}, f_0 = 0,001$	58
6.12. Evolución de la variable $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ en el caso $R_i = 16mm, V = 250ms^{-1}, f_0 = 0,001$	59
6.13. Evolución de la variable $f$ en el caso $R_i = 16mm, V = 250ms^{-1}, f_0 = 0,001$	60



6.14. Evolución de la variable $T$ en el caso $R_i = 16mm, V = 250ms^{-1}, f_0 = 0,001$	61
6.15. Elemento seleccionado para la obtención de datos . . . . .	62
6.16. Comportamiento material obtenido en el escenario 1 ( $R = 16mm, V = 250ms^{-1}$ ) . . . . .	64
6.17. Comportamiento material obtenido en el escenario 2 ( $R = 16mm, V = 350ms^{-1}$ ) . . . . .	65
6.18. Comportamiento material obtenido en el escenario 3 ( $R = 16mm, V = 450ms^{-1}$ ) . . . . .	66
6.19. Comportamiento material obtenido en el escenario 4 ( $R = 50mm, V = 250ms^{-1}$ ) . . . . .	67
6.20. Comportamiento material obtenido en el escenario 5 ( $R = 50mm, V = 350ms^{-1}$ ) . . . . .	68
6.21. Comportamiento material obtenido en el escenario 6 ( $R = 50mm, V = 450ms^{-1}$ ) . . . . .	69
6.22. Elementos seleccionados para obtener $\overline{\epsilon p}_{loc}$ y $\overline{\epsilon p}_{hom}$ . . . . .	70
6.23. $\overline{\epsilon p}_{loc}$ frente a $\overline{\epsilon p}_{hom}$ . . . . .	71
6.24. Evolución de un punto material en el espacio $p-q$ . Superficies de plastificación	74
6.25. Detalle de la figura 6.24 . . . . .	75
6.26. Contorno de triaxialidad ( $t = 6 \cdot 10^{-6}$ ) . . . . .	76
6.27. Influencia de la triaxialidad ( $R_i = 16mm, V = 250ms^{-1}, f_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ ) . . .	77
6.28. Influencia de la triaxialidad ( $R_i = 50mm, V = 450ms^{-1}, f_0 = 1 \cdot 10^{-1}$ ) . . .	78



# Acrónimos

Los acrónimos y abreviaturas usados a lo largo de este proyecto de fin de carrera se muestran a continuación, en la tabla 1.

Tabla 1: Acrónimos

Símbolo	Significado
$\bar{\epsilon}^p$	Deformación plástica equivalente.
$\dot{\bar{\epsilon}}^p$	Velocidad de deformación plástica equivalente.
$\Delta\epsilon_p$	Componente hidrostática del incremento de deformación plástica.
$\Delta\epsilon_q$	Componente desviadora del incremento de deformación plástica.
$\theta$	Temperatura.
$\theta_m$	Temperatura de fusión.
$T$	Triaxialidad.
$\rho$	Densidad.
$f$	Fracción de microvacíos.
$f^*$	Fracción de microvacíos modificada.
$\Phi$	Función de plastificación.
$\bar{\sigma}$	Límite elástico del material.
$p$	Presión.
$q$	Tensión equivalente de Von Mises.
$\sigma_m$	Tensión hidrostática ( $\sigma_m = -p$ ).
$I_i$	Invariante $i$ del tensor de tensiones ( $i = 1, 2, 3$ ).
$J_i$	Invariante $i$ del tensor desviador de tensiones ( $i = 1, 2, 3$ ).
$\xi$	Primera coordenada del espacio de Haigh-Westergaard.
$\rho$	Segunda coordenada del espacio de Haigh-Westergaard.
$\Theta$	Tercera coordenada del espacio de Haigh-Westergaard.
$\sigma_{dir}$	Componentes del tensor de tensiones ( $dir = xx, yy, zz, xy, xz, yz$ ).
$\sigma_i$	Tensiones principales ( $i = 1, 2, 3$ ).
$\tau$	Tensión de cortadura.
$C$	Factor de cohesión.
$\phi$	Ángulo de fricción interna.
$\alpha, k$	Constantes numéricas.
$A_i$	Constante de ajuste $i$ ( $i = 0, 1, 2$ ).
$V$	Velocidad.
$R_i$	Radio interno.
$\sigma_Y$	Límite elástico.
$\epsilon_Y$	Deformación correspondiente al inicio de la plastificación.
$\sigma_{0,2}$	Tensión que da lugar al inicio de la plastificación según el criterio de plastificación del 0.2 %.
$\epsilon_{0,2}$	Deformación correspondiente al inicio de la plastificación según el criterio de plastificación del 0.2 %.
$\bar{\epsilon}^p_{loc}$	Deformación plástica equivalente localizada.
$\bar{\epsilon}^p_{hom}$	Deformación plástica equivalente homogénea.
$tol$	Tolerancia.

Además, la tabla 2 muestra complementos que, añadidos a los símbolos mostrados en la tabla 1 completan su significado. Nótese que  $(\cdot)$  representa cualquier variable.

Tabla 2: Notación complementaria

Notación	Significado
$(\cdot)^{trial}$	Predictor elástico de la variable en el instante de tiempo $t + \Delta t$
$(\cdot)^e$	Componente elástica de la variable.
$(\cdot)^p$	Componente plástica de la variable.
$(\cdot)^\theta$	Componente térmica de la variable.
$(\cdot)_t$	Valor de la variable en el instante de tiempo $t$ .
$(\cdot)_{t+\Delta t}$	Valor de la variable en el instante de tiempo $t + \Delta t$ .
$(\cdot)_0$	Valor inicial o de referencia de la variable.



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

En la actualidad, la industria utiliza la simulación como una potente herramienta con la que se reduce el número de ensayos. La consecuencia de esta reducción es un ahorro de tiempo y dinero en campañas experimentales, ya que éstas son extensas y muy costosas.

Por otro lado, en una gran cantidad de procedimientos de ingeniería tienen lugar procesos de deformación y fractura dúctil en condiciones dinámicas.

El resultado de estos dos hechos motiva el gran esfuerzo que se ha dedicado en las últimas décadas al desarrollo de modelos que caractericen el comportamiento mecánico de los materiales ante tales eventos.

Uno de los modelos micromecánicos que caracterizan la deformación y fractura dúctil más conocidos es el modelo de Gurson. Este modelo incluye en sus ecuaciones constitutivas la fracción de microvacíos como el daño presente en el material, ya que en metales policristalinos la deformación y fractura dúctil está controlada por la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos (ver figura 1.1) [1].

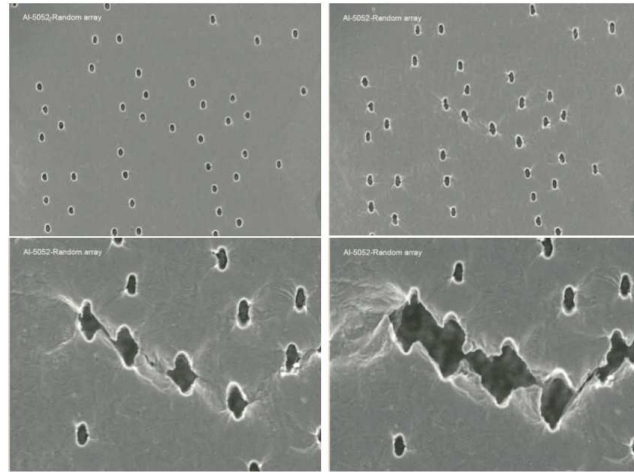


Figura 1.1: Proceso de crecimiento y coalescencia de microvacíos [2]

## 1.2. Objetivos

Los objetivos de este proyecto de fin de carrera son:

- Desarrollo de una subrutina en FORTRAN para implementar el modelo de Gurson en el programa de elementos finitos comercial ABAQUS/Explicit.
- Análisis de la influencia de la porosidad inicial en los resultados del ensayo de expansión de anillos y en las propiedades mecánicas de los materiales.

## 1.3. Contenido

El capítulo 2, plasticidad, muestra conceptos básicos sobre la teoría de la plasticidad, el espacio de tensiones principales y algunos criterios de plastificación.

En el capítulo 3 se explica como incluir el daño en un modelo constitutivo. Al final de este capítulo hay un apartado dedicado al daño presente en metales dúctiles en forma de microvacíos.



Los capítulos 2 y 3 son una preparación para el 4, en el que se describe el modelo de Gurson. Además se explica el algoritmo implementado para la resolución de las ecuaciones constitutivas y un aspecto notable de este modelo, la influencia de la triaxialidad.

En el capítulo 5 se estudian aspectos comunes de los ensayos que se desarrollan a alta velocidad. El final del capítulo se centra en el ensayo de expansión de anillos, ya que las simulaciones llevadas a cabo en este proyecto de fin de carrera representan este ensayo.

En el capítulo 6 se encuentra la descripción del modelo de elementos finitos desarrollado para el análisis, los casos analizados y sus resultados.

Finalmente, en el apartado 7 se exponen las conclusiones y los trabajos futuros sugeridos por el autor.



## Capítulo 2

# Plasticidad

En este proyecto de fin de carrera se estudia el modelo de Gurson, el cual caracteriza el comportamiento de metales dúctiles en régimen tanto elástico como plástico. Por ello, antes de comenzar a hablar del modelo de Gurson, hay que tener unas nociones básicas sobre plasticidad. En este capítulo se introduce la plasticidad, haciendo especial hincapié en qué es un criterio de plastificación.

### 2.1. La teoría de la plasticidad

A lo largo de la vida de un componente aparecen en él una serie de deformaciones como resultado de la aplicación de distintos estados de carga. En ciertos casos estas deformaciones serán de tipo elástico, es decir, el componente recuperará su forma original una vez desaparezca el estado de carga que daba lugar a la deformación. En cambio, existen estados de carga bajo los cuales pueden aparecer deformaciones permanentes como resultado de un cambio drástico en la microestructura del material del cual el componente está formado. Dentro de estos cambios drásticos se incluyen:

- Movimiento de dislocaciones
- Crecimiento y coalescencia de microdefectos
- Desenredo de cadenas poliméricas.

A diferencia de las deformaciones elásticas, las deformaciones permanentes llevan consigo cambios notables en el material. Estos cambios tienen lugar a nivel molecular o cristalino y dan lugar a la modificación de ciertas propiedades del material con respecto a su estado inicial (antes de ser deformado de forma permanente). La mecánica de sólidos, mediante la teoría de la plasticidad, predice los estados de tensión-deformación bajo los cuales estos cambios tienen lugar [3]. Para ello hay dos aspectos clave que hay que definir:

- Cuándo se produce el paso de régimen elástico a plástico.
- Cómo evoluciona la tensión y la deformación en régimen plástico.

La teoría de la plasticidad proporciona criterios para determinar el inicio de la plastificación, así como modelos que describen la evolución de los incrementos de tensión y deformación durante la etapa de flujo plástico. Con objeto de determinar bajo qué estados de tensión y deformación tiene lugar la plastificación de un material, hay que identificar las condiciones específicas bajo las cuales el material queda deformado de forma permanente e inelástica, es decir, definir un criterio de plastificación. Aquí aparece el primer problema: para la mayoría de los metales no hay un umbral fijo que determine el paso de comportamiento puramente elástico a plástico, de hecho, los llamados criterios de plastificación son convenios para predecir el inicio de este fenómeno. Un ejemplo es considerar el comienzo del flujo plástico como cualquier estado tensional que de lugar a una deformación permanente de 0.2 %, conocido como criterio del 0.2 % [3]. La figura 2.1 muestra el concepto del criterio de plastificación del 0.2 %.

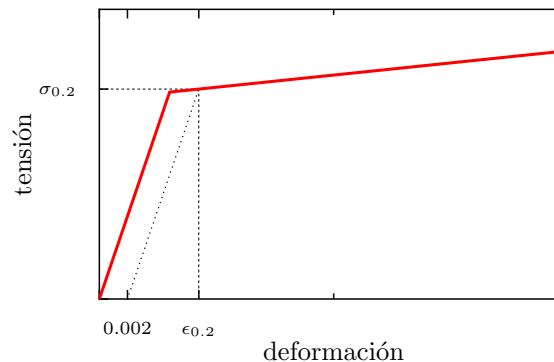


Figura 2.1: Criterio de plastificación del 0.2 %

Un criterio de plastificación puede parecer un concepto simple, pero puede alcanzar un alto grado de complejidad cuando se trabaja con materiales elásticos no lineales, como

polímeros, o cuando materiales de naturaleza viscoelástica se someten a ensayos dinámicos con presencia de efectos inerciales y de propagación de ondas [3].

Como se comenta al inicio del capítulo, la plasticidad estudia no sólo el inicio de la plastificación, sino el flujo de material durante el régimen plástico. Una característica muy común en metales es el endurecimiento por deformación<sup>1</sup>, que presenta una diferencia en la evolución de la tensión-deformación frente aun material perfectamente plástico<sup>2</sup>. La figura 2.2 muestra este concepto. [3]

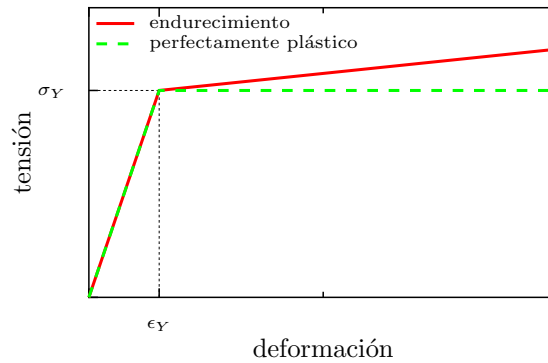


Figura 2.2: Comportamiento plástico con y sin endurecimiento por deformación

### 2.1.1. Condición de consistencia

La condición de consistencia o condición de Kuhn-Tucker establece que una carga plástica siempre tiene lugar sobre la superficie de plastificación. A continuación se expone formalmente la condición de consistencia:

Los valores de la derivada temporal del multiplicador plástico, y la función de plastificación están acotados según se muestra en la ecuación 2.1

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \Phi \leq 0 \quad \dot{\lambda}\Phi = 0 \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>Un material que muestra endurecimiento por deformación es aquél que, una vez se encuentra en régimen plástico, aumenta la tensión que se opone a las cargas aplicadas a medida que aumenta su deformación

<sup>2</sup>Un material perfectamente plástico es aquél que, mientras que cumpla el criterio que establece que se encuentra en régimen plástico, no varía la tensión que se opone a las cargas aplicadas

- Ante descarga o carga elástica, se cumple la ecuación 2.2

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (2.2)$$

Y el estado de tensiones se encuentra bajo la superficie de fluencia ( $\Phi < 0$ ).

- Para el caso de carga plástica el estado de tensiones está sobre la superficie de fluencia ( $\Phi = 0$ ). En este caso se cumple la ecuación 2.3.

$$\dot{\lambda} > 0 \quad (2.3)$$

La expresión  $\Phi = 0$  se conoce como condición de consistencia.

## 2.2. El espacio de tensiones principales. Planos y superficies

Los modelos de materiales empleados en la mecánica de sólidos son de aplicación tridimensional, por lo que los criterios de plastificación formulados a partir de su estado tensional pertenecen a un espacio de seis dimensiones en el que cada una de estas dimensiones es una componente independiente del tensor de tensiones. Es una labor esencial de un ingeniero mostrar conceptos de forma clara e intuitiva, por lo que, gracias a que los materiales bajo estudio son isótropos, se va a reducir este espacio de seis a tres dimensiones. Al realizar esta simplificación, se presenta un espacio de tres dimensiones y la posibilidad de representarlas en ejes cartesianos. Ahora, en vez de las componentes del tensor de tensiones, las dimensiones son las tensiones principales. A este espacio se le denomina espacio de tensiones principales. Esta representación geométrica en ejes cartesianos fue sugerida por Haigh y Westergaard [3], razón por la cual también se le denomina espacio de Haigh-Westergaard y existe un sistema de coordenadas (con interpretación directa en la mecánica de sólidos) llamado sistema de coordenadas de Haigh-Westergaard. La figura 2.3 muestra el espacio de tensiones principales y las coordenadas de Haigh-Westergaard ( $\xi, \rho$  y  $\theta$ ).

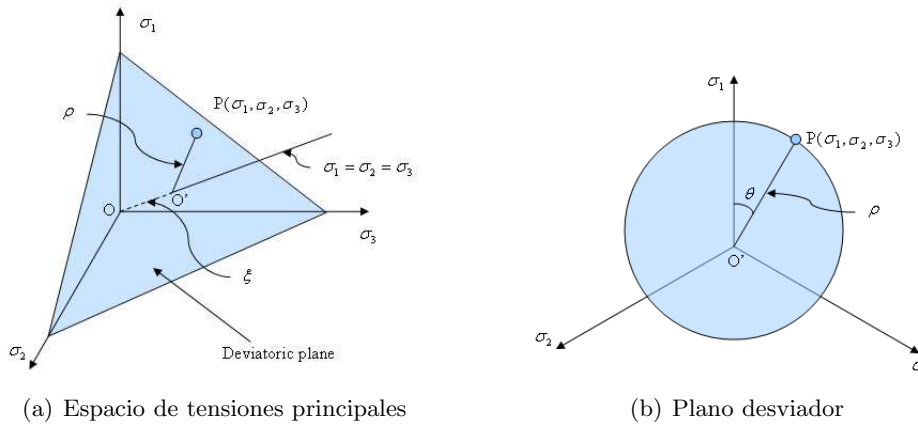


Figura 2.3: Espacio de tensiones principales y coordenadas de Haigh-Westergaard

Los pasos a seguir para trabajar con el espacio de tensiones principales son los siguientes:

1. A partir del estado tensional de un punto material se obtienen sus tensiones principales.
2. A partir de las tensiones principales se representa su estado tensional como un punto en el espacio de tensiones principales.
3. Se identifica de forma gráfica las principales características de dicho estado tensional.

Para facilitar esta identificación, se procede a definir los principales elementos del espacio de tensiones principales y su interpretación desde el punto de vista de la mecánica de sólidos.

### 2.2.1. Eje hidrostático

En el eje hidrostático se encuentran los puntos cuyo estado de carga da lugar únicamente a tensión hidrostática. Su representación en el estado de tensiones principales es la recta definida por la ecuación 2.4 [3].

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{1}{3}I_1 \quad (2.4)$$

Donde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  son las tensiones principales e  $I_1$  es el primer invariante del tensor de tensiones.

### 2.2.2. Planos octaédricos

Los planos octaédricos son aquellos planos perpendiculares a cualquiera de las cuatro diagonales del espacio de tensiones principales. Hay ocho familias de planos octaédricos que responden a las ecuaciones que se pueden obtener de las distintas combinaciones posibles de la ecuación 2.5 [3].

$$\pm\sigma_1 \pm \sigma_2 \pm \sigma_3 = \xi\sqrt{3} \quad (2.5)$$

Dónde  $\xi$  es la primera coordenada Haigh-Westergaard definida como la distancia del plano octaédrico considerado al centro del espacio de tensiones principales (ver figura 2.3). Los planos octaédricos normales al eje hidrostático están definidos por la ecuación 2.6 y se denominan planos desviadores [3].

$$+\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \xi\sqrt{3} \quad (2.6)$$

El plano desviador definido por  $\xi = 0$  se denomina plano  $\pi$ .

### 2.2.3. Planos meridionales

Los planos meridionales son planos perpendiculares a los planos desviadores y que contienen al eje hidrostático. Por su definición, en los planos meridionales la tercera coordenada de Haigh-Westergaard,  $\theta$ , es constante (ver figura 2.3). La intersección de un plano meridional con la superficie de plastificación da lugar a un meridiano. Se puede obtener información muy valiosa de los meridianos, especialmente si son los meridianos definidos por  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$  y  $\theta = 60^\circ$ , ya que en estos meridianos se cumple lo siguiente:

- Los meridianos obtenidos a partir del plano meridional  $\theta = 0^\circ$  representan un estado de tensión hidrostática al que se le superpone uno de tracción uniaxial.
- Los meridianos obtenidos a partir del plano meridional  $\theta = 30^\circ$  representan un estado de tensión hidrostática más un estado de cortante puro.



- Los meridianos obtenidos a partir del plano meridional  $\theta = 60^\circ$  representan un estado de tensión hidrostática más un estado de compresión uniaxial.

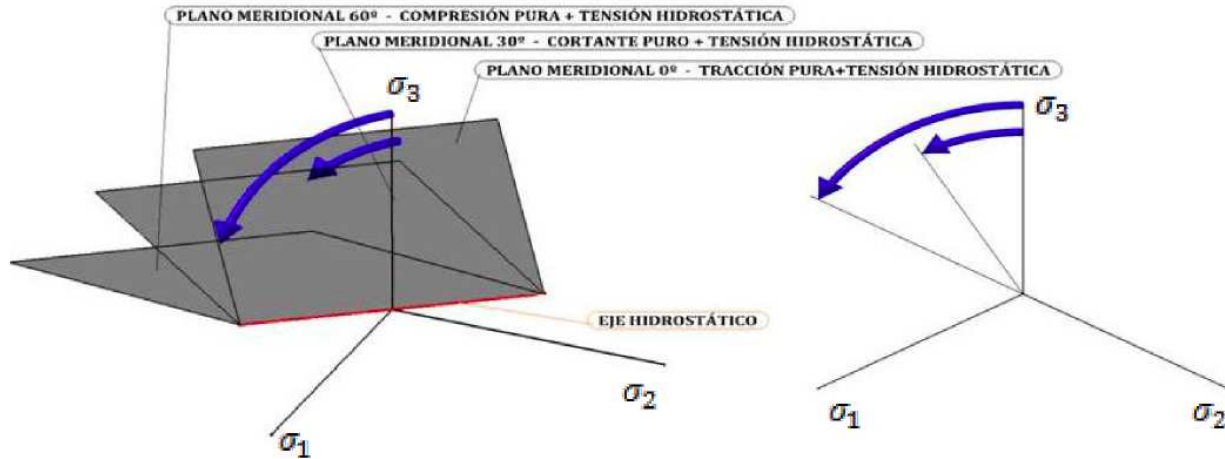


Figura 2.4: Espacio de tensiones principales. Planos meridionales

## 2.3. Criterios de plastificación

En este apartado, se recogen algunas herramientas matemáticas para establecer un criterio de plastificación. Para ello, la función de plastificación se empleará como indicador del comienzo y evolución de la plastificación. La función de plastificación es una función que define si el material se encuentra en régimen elástico o plástico. Para cumplir la condición de consistencia (ver apartado 2.1.1) su valor es menor que cero cuando el punto material se encuentra en régimen elástico e igual a cero en régimen plástico. Una vez se haya entrado en régimen plástico, los estados de tensión y deformación estarán gobernados por las leyes de flujo plástico [3].

### 2.3.1. La función de plastificación

La superficie de plastificación es el lugar geométrico de los puntos correspondientes a estados tensionales que dan lugar a régimen plástico, es decir, que verifican que el valor de la función de plastificación es cero.

Al igual que al estudiar el espacio de tensiones principales, si se aborda el análisis de la superficie de plastificación de forma general, se tiene una hipersuperficie de plastificación en un espacio de seis dimensiones, que correspondería con todos los posibles estados tensionales en los que la plastificación tiene lugar. Así, por definición, la función de plastificación  $\Phi(\sigma_{ij})$  es igual a cero en los puntos contenidos en la superficie de plastificación (ecuación 2.7) y menor que cero en los puntos correspondientes a estados de tensión del dominio elástico (ecuación 2.8) [3].

$$\Phi(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}) = 0 \quad (2.7)$$

$$\Phi(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}) < 0 \quad (2.8)$$

En el caso de materiales isótropos, la hipersuperficie de plastificación pasa a ser una superficie definida en el espacio de tensiones principales (ecuación 2.9)[3].

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (2.9)$$

En éste caso, también se puede formular la superficie de plastificación en función de los tres invariantes del tensor de tensiones (ecuación 2.10).

$$\Phi(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad (2.10)$$

Donde  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  son los invariantes del tensor de tensiones, que se definen a partir de sus componentes como se muestra en el anexo A, en las ecuaciones A.2, A.3 y A.4 [3].

A continuación se muestran algunos criterios de plastificación. Se ha optado por clasificar los criterios atendiendo a su dependencia con la tensión hidrostática, ya que es un aspecto clave en el modelo de Gurson.

### 2.3.2. Criterios de plastificación independientes de la tensión hidrostática

En la investigación sobre plasticidad en metales, Hill [4] llevó a cabo experimentos que mostraban que la tensión hidrostática no influía en la plastificación incluso en magnitudes

de presión del orden de kilobares. Esta no influencia de la presión en el régimen plástico da lugar a una formulación más reducida para el criterio de plastificación que la mostrada al final del apartado anterior ( $\Phi(I_1, I_2, I_3) = 0$ ), suprimiendo la dependencia del criterio con la tensión hidrostática. Teniendo en cuenta este fenómeno se puede definir una función de plastificación en función de los invariantes del tensor desviador de tensiones. Nótese que el primer invariante del tensor desviador de tensiones es nulo, por lo que la función de plastificación pasa de una dependencia con tres variables a una dependencia con dos (ver ecuación 2.11)[3].

$$\Phi(J_2, J_3) = 0 \quad (2.11)$$

Hay dos criterios de plastificación que fueron formulados a los comienzos de la teoría de la plasticidad, el criterio de Von Mises [5] y el de Tresca [6]. Han pasado muchos años desde su formulación, durante los cuales han aparecido nuevos y más complejos criterios de plastificación, pero cabe notar que estos criterios siguen empleándose de manera habitual en la industria [3]. El criterio de Von Mises asume, no sólo la no influencia de la tensión hidrostática, si no además, la no influencia del tercer invariante del tensor desviador de tensiones, es decir, depende exclusivamente del segundo invariante del tensor desviador de tensiones,  $J_2$ . Por ello, cuando se utiliza el criterio de Von Mises como criterio de plastificación es frecuente hablar de plasticidad  $J_2$  (ecuación 2.12)[3].

$$\Phi(J_2) = 0 \quad (2.12)$$

El segundo invariante del tensor desviador de tensiones es también conocido como la tensión equivalente de Von Mises (ver Anexo A, ecuación A.12). Este criterio establece que la plastificación tiene lugar cuando la tensión equivalente de Von Mises alcanza el límite elástico (ecuación 2.13).

$$J_2 = q = \sigma_Y \quad (2.13)$$

Gracias a la relación entre las coordenadas de Haigh-Westergaard y los invariantes del tensor de tensiones y del tensor desviador de tensiones, se puede interpretar la ecuación 2.13. En el espacio de tensiones principales la superficie de plastificación correspondiente al criterio de de Von Mises es un cilindro cuyo eje es el eje hidrostático o diagonal del primer cuadrante. Su intersección con cualquier plano desviador da lugar a un círculo de radio constante [3].

El otro famoso criterio de plastificación es el de Tresca, propuesto en 1864 para materiales granulares. Como se puede ver en la ecuación 2.14, el criterio de Tresca presenta dependencia, no sólo con el segundo, si no también con el tercer invariante del tensor desviador de tensiones.

$$\Phi(J_2, J_3) = 0 \quad (2.14)$$

En cuanto a sus características, hay que resaltar que es un criterio de tensión de cortadura máxima, ya que define el inicio de la plastificación como el estado tensional en el que la cortadura máxima alcanza un valor determinado o constante  $k$  (ecuación 2.15).

$$\tau_{max} = k \quad (2.15)$$

La superficie de plastificación correspondiente al criterio de Tresca es un cilindro hexagonal cuyo eje es el eje hidrostático. Las intersecciones entre la superficie de plastificación de Tresca y los planos desviadores son hexágonos.

La representación de ambas superficies en el espacio de tensiones principales se muestra en la figura 2.5.

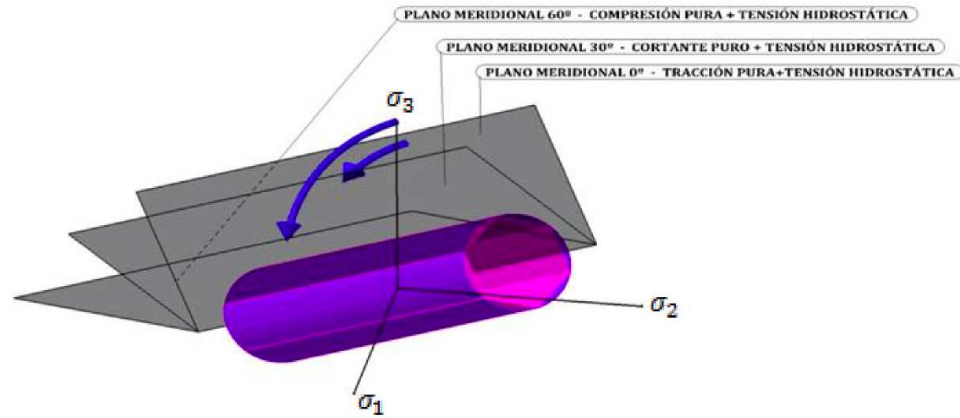


Figura 2.5: Superficies de plastificación de Von Mises y de Tresca en el espacio de tensiones principales

Para una mejor comprensión de la figura 2.5 se muestra la figura 2.6. Esta última figura es una vista normal al plano desviador.

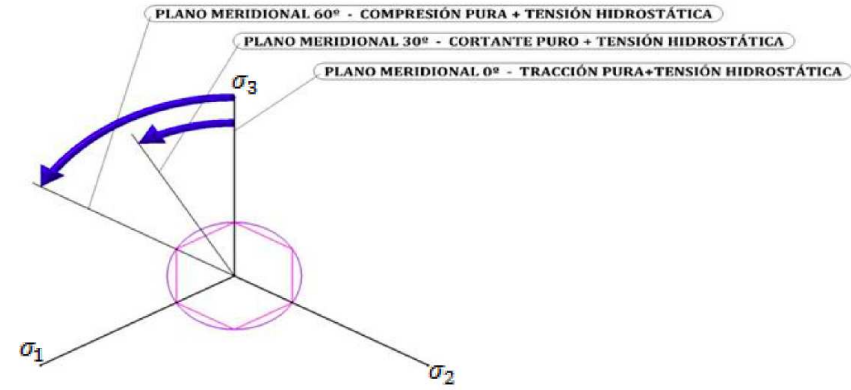


Figura 2.6: Vista normal al eje hidrostático de las superficies de plastificación de Von Mises (morado) y de Tresca (rosa)

### 2.3.3. Criterios de plastificación dependientes de la tensión hidrostática

A medida que avanzó la investigación en metales, se hizo necesario considerar la presencia de porosidad en el material, lo que dió lugar al estudio de la influencia de la tensión hidrostática en el comportamiento plástico de los mismos. Además, hay materiales como el hormigón u otra clase de materiales geológicos para los cuales el criterio de plastificación debe incluir la influencia de la tensión hidrostática.

Una manera de incluir la dependencia del criterio de plastificación con la tensión hidrostática es la combinación de uno de los dos criterios de plastificación citados previamente (Von Mises o Tresca) junto con el criterio de Rankine, en el que se considera el inicio de la plastificación cuando la tensión principal mayor alcanza un valor constante ( $\sigma_0$ ). La superficie de plastificación de este criterio está formada por tres planos perpendiculares a cada eje de tensión principal, como se muestra en la ecuación 2.16.

$$\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = \sigma_0, \sigma_3 = \sigma_0 \quad (2.16)$$

Por otro lado, la modificación del criterio de Tresca da lugar al criterio de Mohr-

Coulomb. La parte común entre el criterio de Tresca y el de Mohr-Coulomb es que el factor decisivo para la plastificación es la tensión de cortadura máxima. La diferencia entre los dos criterios es que, como se puede ver en la ecuación 2.17, en el criterio de Mohr-Coulomb se tiene en cuenta la tensión hidrostática.

$$\tau_{max} = C - \frac{I_1}{3} \tan \phi \quad (2.17)$$

Dónde  $\phi$  representa el ángulo de fricción interna y  $C$  el factor de cohesión. Los meridianos son la representación más útil para ver la influencia de la presión en el criterio de plastificación

La extensión del criterio de Von Mises da lugar al criterio de Drucker-Prager, en el que, a diferencia del de Von Mises, se incluye la influencia de la tensión hidrostática y además, contempla la diferencia entre estados tensionales de tracción o compresión [3]. La formulación de este criterio se muestra en la ecuación 2.18.

$$\alpha \xi \sqrt{3} + \frac{\rho \sqrt{3}}{3} - k = 0 \quad (2.18)$$

En la ecuación 2.18,  $\alpha$  y  $k$  son constantes. Esta modificación da lugar a que la superficie de plastificación pase de ser un cilindro (Von Mises) a ser un cono. La relación entre los parámetros de la superficie de Drucker-Prager y Mohr-Coulomb viene determinada por las ecuaciones 2.19 y 2.20

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 \pm \sin \phi)} \quad (2.19)$$

$$k = \frac{6C \cos \phi}{\sqrt{3} (3 \pm \sin \phi)} \quad (2.20)$$

En dónde el signo menos representa la superficie de plastificación de Drucker-Prager circunscrita en la de Mohr-Coulomb y el signo más la inscrita. La figura 2.7 muestra las superficies de plastificación de Mohr-Coulomb (rojo), de Drucker Prager coincidente con las aristas exteriores (verde oscuro) y con las aristas interiores (verde claro). Se muestran

en esta figura los planos meridionales correspondientes a tracción pura más tensión hidrostática ( $\theta = 0^\circ$ ), cortadura pura más tensión hidrostática ( $\theta = 30^\circ$ ) y compresión pura más tensión hidrostática ( $\theta = 60^\circ$ ).

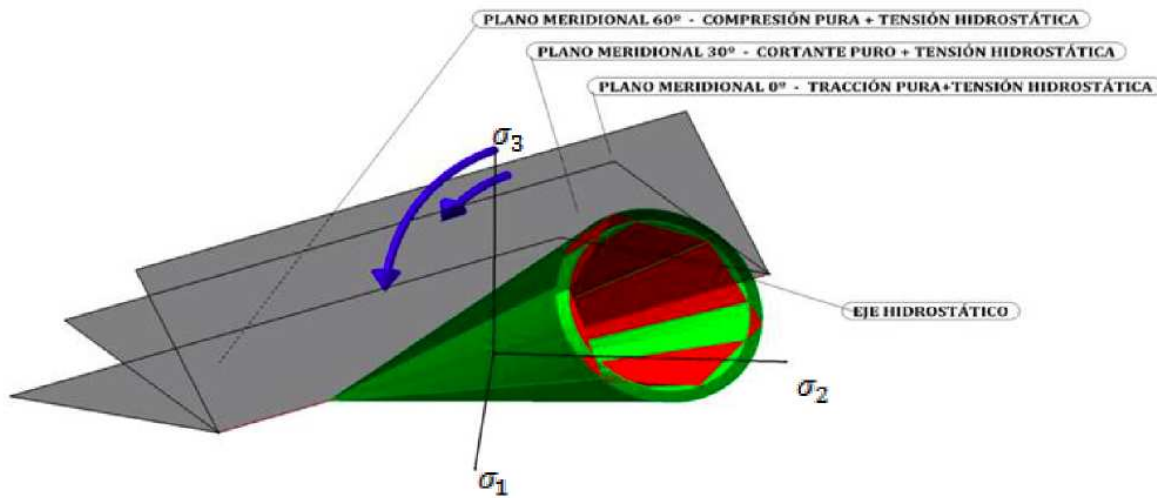


Figura 2.7: Superficies de plastificación de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager coincidente con las aristas exteriores y con las aristas interiores representadas en el espacio de tensiones principales

Para una mejor visualización de este concepto se muestra una vista normal al eje hidrostático en la figura 2.8, es decir, de uno de los planos desviadores. En esta vista se observa como en los puntos del plano desviador correspondientes a tracción pura la superficie de Mohr-Coulomb (rojo) coincide con la superficie de Drucker-Prager circunscrita (verde oscuro) y en los puntos de compresión pura coincide con la de Drucker-Prager inscrita (verde claro).

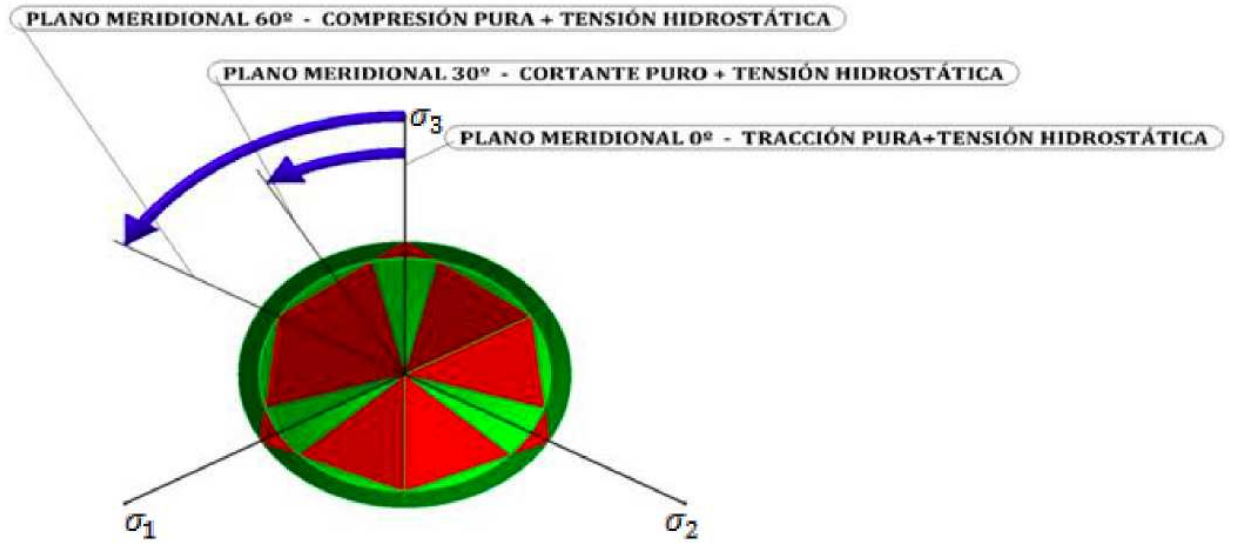


Figura 2.8: Vista de la superficies de plastificación de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager coincidente con los outer apexes y con los inner apexes normal al eje hidrostático

A parte de los criterios de plastificación descritos anteriormente, existen criterios cuya dependencia con la tensión hidrostática es cuadrática. Un ejemplo es el que se define a partir de la ecuación 2.21.

$$J_2^2 + A_0 + A_1 I_1 - A_2 I_1^2 = 0 \quad (2.21)$$

En la ecuación 2.21  $A_0$ ,  $A_1$  y  $A_2$  son constantes.



## Capítulo 3

# Mecánica del daño

En el capítulo 2 se revisan conceptos básicos sobre plasticidad que son necesarios para entender el modelo de Gurson. Otra característica importante del modelo de Gurson es que es un modelo de daño, por lo que en este capítulo se explica brevemente en que consiste la mecánica del daño.

### 3.1. Campo de aplicación de la mecánica del daño

El modelo de Gurson se basa en la mecánica del daño, por lo que, a continuación se acota la aplicabilidad de la mecánica del daño y se razona por qué es la teoría más apropiada para los estudios realizados en este proyecto de fin de carrera.

El daño es el deterioro irreversible de cualquier material que puede producir el fallo de un componente estructural. El objeto de la mecánica del daño es entender el comportamiento de un material con presencia de daño. Dentro de daño material se incluye [7]:

- Cualquier tipo de distribución de microvacíos<sup>1</sup>
- Fisuras
- Cavidades

---

<sup>1</sup>Los microvacíos son defectos del material resultado de la presencia de porosidad o de la falta de fuerza cohesiva a nivel atómico por la presencia de una inclusión u otra fase del mismo material [23]

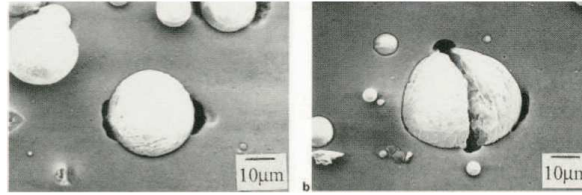


Figura 3.1: Nucleación de microvacíos por la presencia de partículas (decohesión y rotura) [2]

Otra característica del daño material, aparte de su presencia en cualquiera de las formas descritas en el párrafo anterior, es su evolución. La evolución del daño material se puede dividir en las siguientes etapas [7]:

1. Nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos
2. Iniciación de una fisura macroscópica
3. Progresiva degradación del material y la consecuente pérdida de resistencia y/o rigidez.

La mecánica del daño se puede estudiar a diferentes escalas. La elección de una u otra escala será función del objetivo que se quiera alcanzar y del problema que se plantee [7].

- Escala molecular. Estudia el comportamiento de las dislocaciones y de las fuerzas interatómicas.
- Microescala. Tiene interés estructural, pero su aplicación es para materiales heterogéneos o para considerar que el campo de tensiones y deformaciones no es homogéneo en torno al daño.
- Mesoescala. Tiene interés estructural y aplica para componentes en los que se inicia la formación de fisuras.
- Macroescala. Tiene interés estructural y su aplicación se encuentra en componentes fisurados.

La dinámica molecular estudia la escala molecular, en cambio la microescala y la mesoescala se pueden estudiar con la mecánica del daño y finalmente la macroescala se estudia

con la mecánica de la fractura. La figura 3.2 muestra de forma esquemática las distintas escalas y algunos de los fenómenos que se estudian en cada escala [23].

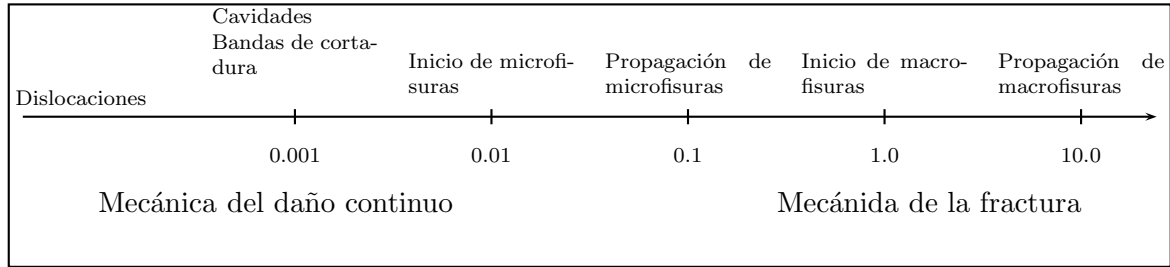


Figura 3.2: Escalas para el estudio del daño material

En la mesoescala se parte de la hipótesis de que el material dañado es un material quasi continuo. En la realidad se tiene un sólido con presencia de daño, lo que se estudia es un sólido homogéneo carente de daño al que se le añade como variable de estado un parámetro que mide cómo de dañado está. Para calcular las tensiones y deformaciones que aparecerán en el sólido real ante un estado de cargas se calculan las tensiones y deformaciones que aparecerían en el sólido homogéneo ante el mismo estado de cargas y luego, se modifican con la variable de daño. El elemento clave de esta idealización es el principio de equivalencia. Mediante el principio de equivalencia se relacionan las tensiones y deformaciones reales con las calculadas en el sólido homogéneo y carente de daño. En el principio de equivalencia se igualan los valores de una magnitud para encontrar las relaciones necesarias entre las tensiones y deformaciones del sólido real y el idealizado [7].

A lo largo de la historia distintos autores han utilizado diferentes principios de equivalencia. La tabla 3.1 muestra un resumen de los distintos principios de equivalencia a lo largo de la historia. En esta tabla se muestra la magnitud utilizada en el principio de equivalencia y los autores que utilizaron esta magnitud.

La o las variables de daño son las responsables de homogeneizar la verdadera distribución del daño en el material. Nótese que una variable de daño puede ser un escalar, un vector o un tensor (2º o 4º orden) [7].

Tabla 3.1: Principios de equivalencia y autores

Magnitud	Científicos
Deformación	Lemaître (1971), Lemaître y Chaboche (1978)
Tensión	Simo y Ju (1987)
Energía elástica	Cordebois y Sidoroff (1979), Sidoroff (1981)
Energía total	Chow y Lu (1992)
Energía plástica	Gurson (1975)

### 3.2. Elemento volumétrico representativo

Para estudiar el comportamiento del material se analiza lo que ocurre en una porción del mismo. Esta porción es el elemento volumétrico representativo y representará un punto en el sólido equivalente pseudodañado. Hay dos requisitos para el elemento volumétrico representativo [7]:

- Que sea lo suficientemente grande para incluir microvacíos y fisuras microscópicas.
- Que sea lo suficientemente pequeño para que el campo de tensiones y deformaciones se pueda considerar homogéneo.

Una de las principales suposiciones en la mecánica del daño es que la distribución espacial de las posiciones de los defectos tiene una influencia de 2º orden, por lo que la configuración real de microvacíos puede ser despreciada. De no poder ser despreciada, habría que enfocar el problema mediante la teoría local de medios continuos .

### 3.3. Fracción de microvacíos en metales dúctiles

De forma más específica que al comienzo del capítulo, la fractura en metales dúctiles sigue los siguientes pasos:

- a) Crecimiento de microvacíos existentes (si hay)
- b) Nucleación y crecimiento de nuevos microvacíos

## c) Coalescencia de microvacíos

La fracción de microvacíos se define según la ecuación 3.1

$$f = \frac{\delta V - \delta V_s}{\delta V} \quad (3.1)$$

Donde  $\delta V$  es el volumen total del elemento volumétrico representativo y  $\delta V_s$  es el volumen ocupado por material no dañado. En cuanto a la fracción de microvacíos inicial, nunca se va a tener un material con  $f_0 = 0$ . Considerar un material sin daño es una idealización. Valores de fracción de microvacíos típicos en metales son  $f_0 = 10^{-3}$ ,  $f_0 = 10^{-4}$ . Algunas características de la fracción de microvacíos en metales son [7]:

- La nucleación de nuevos microvacíos sigue una distribución espacial uniforme.
- El crecimiento de los microvacíos produce que estos se elonguen a lo largo del eje de tensión principal.
- La coalescencia tiene lugar entre microvacíos vecinos que se unen, normalmente por la formación de bandas de cortadura cuando la fracción de microvacíos alcanza valores en torno a 0.1 ó 0.2.



## Capítulo 4

# Modelo de Gurson

Una vez expuestas ciertas nociones de plastificación en el capítulo 2 y de mecánica del daño en el capítulo 3, se puede empezar a hablar del modelo de Gurson. El modelo de Gurson es un modelo constitutivo que contempla la aparición y evolución de daño en el material. El modelo de Gurson es de aplicación en materiales dúctiles, donde el fallo se produce por formación, crecimiento y coalescencia de microvacíos. Además, es un modelo que define un criterio de plastificación dependiente de la tensión equivalente de Von Mises, la tensión hidrostática y el daño material. En el caso extremo de que el daño sea nulo, se obtiene un criterio de plastificación  $J_2$  (ver apartado 2.3.2 para más detalles). El modelo fue desarrollado originalmente por Gurson [8] y mejorado primero por Tveergard y más adelante por Tveergard y Needleman, dando lugar al conocido modelo GTN. Thomason completó el modelo añadiendo un criterio de inicio de coalescencia, que da lugar al conocido como modelo de Gurson completo [9].

### 4.1. Ecuaciones constitutivas

La parte elástica queda definida por la ecuación 4.1.

$$\boldsymbol{\sigma}^\nabla = C : \mathbf{d}^e = C : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^\theta - \mathbf{d}^p) \quad (4.1)$$

En la que  $\boldsymbol{\sigma}^\nabla$  es una derivada objetiva del tensor de tensiones de Cauchy,  $\mathbf{d}$  es el tensor

velocidad de deformación y  $C$  es el tensor de tensión-deformación de Hooke (ecuación 4.2) definido a partir de las constantes elásticas  $G$  (ecuación 4.3) y  $K$  (ecuación 4.4) y del tensor unitario desviador de cuarto orden (ecuación 4.5).

$$C = 2G\mathbf{I}^{dev} + K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (4.2)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.3)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.4)$$

$$\left(\mathbf{I}^{dev}\right)_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (4.5)$$

La función de plastificación se muestra en la ecuación 4.6. Gracias al criterio de plastificación se establece el límite del dominio elástico.

$$\Phi(q, p, \bar{\sigma}, f^*) = \frac{q^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3q_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - (q_1 f^*)^2 = 0 \quad (4.6)$$

En la ecuación 4.6,  $\bar{\sigma}$  es el límite elástico,  $q$  la tensión equivalente de Von Mises,  $p$  la presión hidrostática,  $q_1$  y  $q_2$  constantes y  $f^*$  la fracción de microvacíos modificada. La primera modificación del modelo original, hecha por Tveergard, fue añadir los parámetros de ajuste  $q_1$  y  $q_2$ . La segunda modificación, esta vez realizada por Tveergard junto con Needleman, fue sustituir la fracción de microvacíos ( $f$ ) por la fracción de microvacíos modificada ( $f^*$ ). La variable de daño sin modificar representa la fracción de microvacíos presente en el material dañado y es la entrada para la función que da como resultado la variable de daño modificada,  $f^*$  (ecuación 4.7) [9].

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f < f_c \\ f_c + \frac{f_u - f_c}{f_F - f_c} (f - f_c) & \text{si } f_c \leq f \leq f_F \\ f_u & \text{si } f > f_F \end{cases} \quad (4.7)$$

Además de la variable de daño, también son entradas de la variable de daño modificada:

- $f_c$  : fracción de microvacíos con la que aparece coalescencia.
- $f_F$  : la fracción de microvacíos cuando se produce el fallo final del material.



- $f_u$  : valor que toma la fracción de microvacíos en el momento del fallo. Este valor suele ser  $1/q_1$ .

Como se comenta en párrafos anteriores, el modelo de Gurson fue completado por el criterio de Thomason para determinar la coalescencia de microvacíos. Se modifica así el inicialmente valor constante de  $f_c$  por un valor dependiente del estado tensional y de las deformaciones principales. La idea que yace bajo el criterio de Thomason es que la coalescencia de microvacíos coincide con la carga última del material presente entre los microvacíos. De tal forma que se define el valor de  $f_c$  como la fracción de microvacíos presente en el material cuando el cociente entre la tensión principal mayor y la tensión equivalente alcanza un valor determinado (Ecuación 4.8).

$$\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} = \left( \gamma \left( \frac{1}{r} - 1 \right)^2 + \frac{\beta}{\sqrt{r}} \right) (1 - \pi r^2) \quad (4.8)$$

Donde  $r$  es la proporción de microvacíos definida por la ecuación 4.9

$$r = \frac{\sqrt[3]{\frac{3f}{4\pi} e^{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}}}{\frac{\sqrt{e^{\epsilon_1 + \epsilon_2}}}{2}} \quad (4.9)$$

En la ecuación 4.8 aparecen los coeficientes  $\gamma$  y  $\beta$  que, según diferentes autores adquieren una forma u otra. Thomason les dio valores constantes,  $\gamma = 0,1$  y  $\beta = 1,2$ , considerándolo aplicable a materiales sin endurecimiento por deformación. Pardo y Hutchinson propusieron una dependencia de  $\gamma$  con el coeficiente  $n$  de la ley de endurecimiento de Ramberg-Osgood <sup>1</sup> (Ecuación 4.10).

$$\gamma = 0,1 + 0,217n + 4,83n^2, \quad \beta = 1,24 \quad (4.10)$$

Si además, se cumple lo expuesto según el modelo de Gurson completo, que los microvacíos tienen forma esférica, Zhang et al. encontraron que es más preciso considerar la ecuación 4.11 [9].

$$\gamma = 0,12 + 1,68n, \quad \beta = 1,2 \quad (4.11)$$

El siguiente aspecto a comentar es cómo crece la fracción de microvacíos. Hay dos mecanismos que hacen que aumente el valor de esta variable y por tanto la proporción de

---

<sup>1</sup>La ley de endurecimiento de Ramberg-Osgood es  $\epsilon = \frac{\sigma}{E} + K \left( \frac{\sigma}{E} \right)^n$

microvacíos presente en el material. Por un lado el valor de  $f$  aumenta por crecimiento de microvacíos existentes y por otro, debido a la nucleación de microvacíos antes no existentes y, por supuesto, su crecimiento. La ecuación 4.12 refleja este doble fenómeno.

$$\dot{f} = \dot{f}_{\text{crecimiento}} + \dot{f}_{\text{nucleacion}} \quad (4.12)$$

Despreciando las deformaciones elásticas, el crecimiento de microvacíos equivale a la expansión de las cavidades de los mismos:

$$\dot{f}_{\text{crecimiento}} = (1 - f) \mathbf{d}^p : \mathbf{1} \quad (4.13)$$

La nucleación de microvacíos está controlada tanto por mecanismos de tensión como de deformación plástica como tensionales:

$$\dot{f}_{\text{nucleacion}} = A \bar{\epsilon}^p + B (\bar{\sigma} - \dot{p}) \quad (4.14)$$

De forma que un material cuyo mecanismo de nucleación esté controlado por deformación plástica tomaría un valor de A mayor que cero y un valor de B igual a cero. Chu y Needleman propusieron el valor para A que se muestra en la ecuación 4.15 ( $B = 0$ ) [2].

$$A = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (4.15)$$

## 4.2. Algoritmo de resolución

Para la mayoría de problemas termo-visco-plásticos no existe una solución analítica exacta, por lo que se buscan soluciones numéricas mediante el método de los elementos finitos. El periodo temporal que quiere ser analizado se divide en incrementos, cada uno de ellos caracterizado por un incremento temporal. El método de resolución se puede resumir en: conocida la solución en un instante de tiempo  $t_n$  (desplazamientos, tensiones y deformaciones) y dada la carga aplicada en el siguiente instante de tiempo  $t_{n+1}$ , ha de encontrarse la solución para el instante de tiempo  $t_{n+1}$  [11]. Quien gobierna el análisis es el incremento de deformación, dado en cada punto de integración para cada división temporal [9].

El algoritmo de retorno radial es ampliamente utilizado en problemas que incluyen deformaciones plásticas. Antes de entrar en una descripción formal del método, se introduce conceptualmente:

- Primero se calculan las tensiones al final del incremento como si no hubiera deformaciones plásticas, es decir, suponiendo que el 100 % del incremento de deformación es elástico.
- Se determina si el material cumple un criterio de plastificación previamente seleccionado. En caso de ser un incremento elástico, el cálculo ha terminado. Si al final del incremento el material cumple el criterio de plastificación, hay que calcular qué parte del incremento de deformación es deformación plástica y cual elástica. A partir de la deformación separada en deformación plástica y elástica se puede calcular un incremento de tensión de retorno, que será el responsable de pasar del final del incremento elástico al final del incremento real.
- Mediante la regla de normalidad y la condición de consistencia se determina la deformación y tensión reales al final del incremento. Por las dos hipótesis mencionadas, el final del incremento tendrá lugar en un punto situado en la superficie de plastificación (condición de consistencia) y además, el incremento de tensión de retorno, tendrá dirección perpendicular a la superficie de plastificación en el espacio de tensiones principales (regla de normalidad).

El nombre de radial se corresponde con que al usar un criterio de plastificación de Von Mises, la superficie de plastificación vista perpendicularmente a un plano desviador es una circunferencia, y el incremento de tensión de retorno toma dirección radial.

#### 4.2.1. Planteamiento del problema

A continuación se detalla como se ha resuelto el problema mediante el algoritmo del retorno radial. Antes hay que aclarar que se han eliminado ciertos aspectos del modelo con la intención de simplificar su implementación. Los aspectos que no se han reflejado en la implementación del modelo son:

- La modificación de la fracción de microvacíos. Se considera  $f^* = f$ .
- La coalescencia de microvacíos.
- La nucleación de microvacíos.

La parte elástica está gobernada por la ley de Hooke generalizada, que viene dada por la ecuación 4.16

$$\sigma_{t+\Delta t} = C : \epsilon_{t+\Delta t}^e - 3K\alpha\Delta\theta\mathbf{1} \quad (4.16)$$

Por otro lado, la deformación elástica al final del incremento se puede escribir según la ecuación 4.17

$$\epsilon_{t+\Delta t}^e = \epsilon_t^e + \Delta\epsilon_{t+\Delta t}^e = \epsilon_t^e + \Delta\epsilon_{t+\Delta t} - \Delta\epsilon_{t+\Delta t}^p \quad (4.17)$$

Si en la ecuación 4.16 se descompone la deformación elástica al final del incremento, queda la ecuación 4.18

$$\sigma_{t+\Delta t} = C : (\epsilon_t^e + \Delta\epsilon_{t+\Delta t}) - C : (\Delta\epsilon_{t+\Delta t}^p) - 3K\alpha\Delta\theta\mathbf{1} \quad (4.18)$$

La ecuación 4.18 se puede reescribir en la ecuación 4.19.

$$\sigma_{t+\Delta t} = \sigma^{trial} + \Delta\sigma^{return} + \Delta\sigma^\theta \quad (4.19)$$

Los términos introducidos en la ecuación 4.19 se detallan en las ecuaciones 4.20, 4.21 y 4.22.

$$\sigma^{trial} = C : (\epsilon_t^e + \Delta\epsilon_{t+\Delta t}) \quad (4.20)$$

$$\Delta\sigma^{return} = -C : \Delta\epsilon_{t+\Delta t}^p \quad (4.21)$$

$$\Delta\sigma^\theta = -3K\alpha\Delta\theta\mathbf{1} \quad (4.22)$$

El paso siguiente es encontrar el valor de  $\Delta\epsilon_{t+\Delta t}^p$ . Para ello se utiliza la ley de normalidad (ecuación 4.23) que establece que el incremento de deformación plástico es normal a la superficie de plastificación.

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (4.23)$$

La ley de la normalidad escrita de forma incremental da lugar a la ecuación 4.24

$$\Delta\epsilon^p = \Delta\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (4.24)$$

La derivada parcial de la función de plastificación respecto del tensor de tensiones es el gradiente de  $\Phi$  y se puede descomponer en función de la tensión hidrostática  $p$  y de la

tensión equivalente  $q$  como se muestra en la ecuación 4.25

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \mathbf{1} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \mathbf{n}_{t+\Delta t} \quad (4.25)$$

De la ecuación 4.25, tanto  $\frac{\partial \Phi}{\partial q}$  como  $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$  son conocidas, el término que falta por definir es  $\mathbf{n}$ . Para obtenerlo se muestran las variables  $\Delta \epsilon_p$  y  $\Delta \epsilon_q$ , introducidas por Aravas (ecuación 4.26) [12].

$$\Delta \epsilon_p = -\Delta \lambda \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right), \Delta \epsilon_q = \Delta \lambda \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right) \quad (4.26)$$

Ahora se puede reescribir la ecuación 4.21 en la ecuación 4.27

$$\Delta \sigma^{return} = -K \Delta \epsilon_p \mathbf{1} - 2G \Delta \epsilon_q \mathbf{n}_{t+\Delta t} \quad (4.27)$$

Además, gracias a las variables introducidas por Aravas, la ecuación 4.19 se puede dividir en su parte hidrostática y desviadora como muestran las ecuaciones 4.28 y 4.29.

$$p_{t+\Delta t} = p^{trial} + K \Delta \epsilon_p + 3K \alpha \Delta \theta \quad (4.28)$$

$$q_{t+\Delta t} = q^{trial} - 3G \Delta \epsilon_q \quad (4.29)$$

De la ecuación 4.27 se puede obtener la tensión desviadora como se muestra en la ecuación 4.30.

$$\mathbf{s}_{t+\Delta t} = \mathbf{s}^{trial} - 2G \Delta \epsilon_q \mathbf{n}_{t+\Delta t} = \mathbf{s}^{trial} - 3G \Delta \epsilon_q \frac{\mathbf{s}_{t+\Delta t}}{q_{t+\Delta t}} \quad (4.30)$$

Si se despeja la tensión desviadora para  $t + \Delta t$ , introduciendo el valor de  $q^{trial}$  de la ecuación 4.29, queda la ecuación 4.31

$$\mathbf{s}_{t+\Delta t} = \frac{q_{t+\Delta t}}{q^{trial}} \mathbf{s}^{trial} \quad (4.31)$$

Finalmente, por la definición de  $\mathbf{n}$ , se obtiene la ecuación 4.32

$$\mathbf{n}_{t+\Delta t} = \mathbf{n}^{trial} \quad (4.32)$$

Las variables de estado quedan definidas (se considera la densidad de la matriz,  $\rho_0$ , constante):

$$\dot{\rho} + \rho \mathbf{d} : \mathbf{1} = 0 \quad (4.33)$$

$$\rho C_p \dot{\theta} = \eta \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p \quad (4.34)$$

$$\dot{f} = (1 - f) \mathbf{d}^p : \mathbf{1} \quad (4.35)$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p = (1 - f) \overline{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\overline{\epsilon}}^p \quad (4.36)$$

Las variables de estado se actualizan:

$$\Delta \rho = -\rho \Delta \epsilon : \mathbf{1} \quad (4.37)$$

$$\Delta \theta = \eta \frac{(q \Delta \epsilon_q - p \Delta \epsilon_p)}{\rho C_p} \quad (4.38)$$

$$\Delta f = (1 - f) \Delta \epsilon_p \quad (4.39)$$

$$\Delta \overline{\epsilon}^p = \frac{q \Delta \epsilon_q - p \Delta \epsilon_p}{(1 - f) \sigma_y} \quad (4.40)$$

$$\dot{\overline{\epsilon}}^p = \frac{\Delta \overline{\epsilon}^p}{\Delta t} \quad (4.41)$$

Por tanto el problema se convierte en encontrar los valores de  $\Delta \epsilon_p$ ,  $\Delta \epsilon_q$  y  $\Delta \theta$  para finalmente obtener la tensión en el instante  $t + \Delta t$  como se muestra en la ecuación 4.42.

$$\sigma_{t+\Delta t} = \frac{2}{3} q_{t+\Delta t} \mathbf{n}^{trial} - p_{t+\Delta t} \mathbf{1} \quad (4.42)$$

### 4.3. Efecto de la triaxialidad

En este apartado se muestra la influencia de la triaxialidad en la evolución de la fracción de microvacíos. Como ya se ha dicho previamente, la característica más importante del modelo de Gurson respecto a la teoría de la plasticidad clásica es que admite la influencia de la tensión hidrostática y la incorporación de la variable daño en el comportamiento del material.

La triaxialidad es un parámetro cuyo valor es la relación entre la tensión hidrostática y la tensión equivalente de Von Mises (ecuación 4.43) [1].

$$TRI = \frac{-p}{q} \quad (4.43)$$

En el modelo de Gurson estudiado en este proyecto, en el que sólo se considera el aumento de la fracción de microvacíos por el crecimiento de los ya existentes, el incremento de la fracción de microvacíos  $\Delta f = (1 - f) \Delta \epsilon_p$  depende de:

- El valor de la propia fracción de microvacíos en ese momento.
- El valor de la variable introducida por Aravas,  $\Delta\epsilon_p$  [12].

Según la ecuación 4.26,  $\Delta\epsilon_p$  es proporcional a la derivada parcial de la función de plastificación respecto de la presión. La ecuación 4.44 muestra el desarrollo de esta derivada.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\frac{3q_1q_2f^*}{\bar{\sigma}} \sinh\left(\frac{3q_2p}{2\bar{\sigma}}\right) \quad (4.44)$$

La relación de proporcionalidad es el multiplicador plástico ( $\Delta\lambda$ ), que siempre es positivo en régimen plástico, por lo que se deduce que ante presiones positivas  $\Delta\epsilon_p$  es negativo y ante presiones negativas, positivo. Por tanto, fracción de microvacíos puede tanto crecer como decrecer. Una interpretación de esto es que ante un estado de presión positiva, es decir, tensión hidrostática negativa, el material puede plastificar, y siendo la variación de volumen del material negativa, dar lugar a una disminución en la fracción de microvacíos y por tanto, un aumento en la densidad.

Una triaxialidad nula da lugar que la fracción de microvacíos permanezca constante. Por otra parte, una triaxialidad positiva provoca un aumento de la fracción de microvacíos y una triaxialidad negativa, una reducción.

## 4.4. Implementación en ABAQUS

La implementación del modelo de Gurson en el programa comercial ABAQUS [25] se ha hecho mediante una subrutina escrita en FORTRAN. ABAQUS utiliza la subrutina para obtener ciertos parámetros del comportamiento material, como por ejemplo las tensiones, a partir de otros parámetros, como por ejemplo el incremento de deformación o el valor de las variables de estado al principio del incremento.

Para ser más específicos, el código utilizado ha sido ABAQUS/Explicit, que a diferencia de ABAQUS/Standard, utiliza métodos explícitos para la integración de las ecuaciones del movimiento. La subrutina se denomina VUMAT según la terminología de ABAQUS y su principal diferencia con la subrutina UMAT (ABAQUS/Standard) es que, al no ser un método implícito, no se calcula el Jacobiano.

La figura 4.1 muestra un diagrama de flujo con los pasos que sigue la subrutina. El método seguido es un método explícito, ya que en el cálculo de  $\Delta\epsilon_q$  se encuentra  $\bar{\sigma}$  del paso anterior. Además, si se observa con detenimiento la parte principal del bucle iterativo (cálculo de  $\Delta\epsilon_p$  y  $\Delta\epsilon_q$ ) la ecuación de la que se obtiene  $p^{(i)}$  no se corresponde con la ecuación 4.28. En el bucle se comete un error, valorado previamente, que es no incluir el efecto del incremento de temperatura en el cálculo de la presión. Ahora lo que hay que hacer es controlarlo, ya que, siempre y cuando el error sea conocido y lo suficientemente pequeño, se puede despreciar su efecto. Más adelante, en el capítulo en el que se muestran los resultados, se ve como mediante una variable que evalúa el error cometido, se validan los análisis.



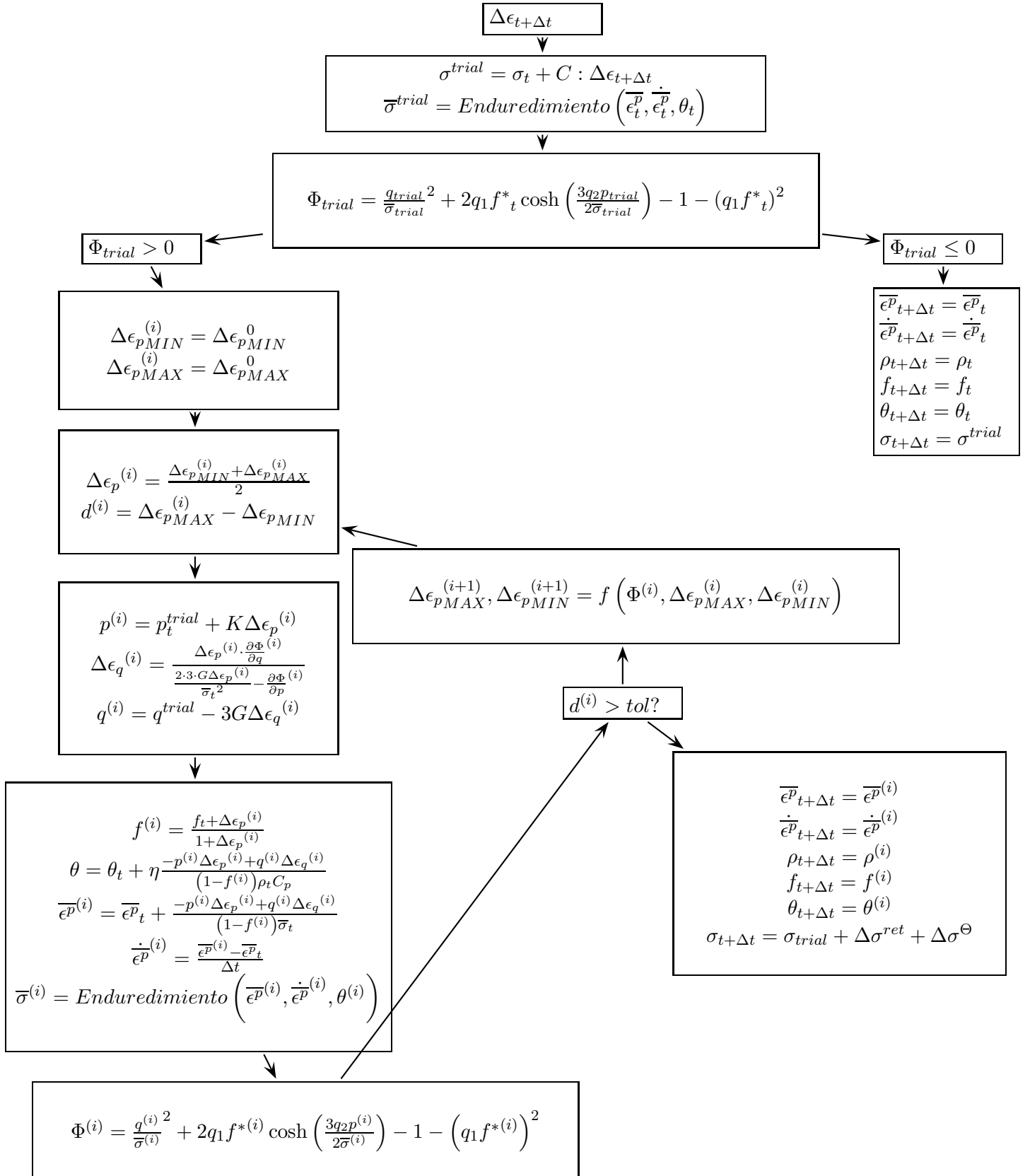


Figura 4.1: Diagrama de flujo de la subrutina VUMAT



## Capítulo 5

# Caracterización de materiales a alta velocidad

### 5.1. El test de Taylor

Taylor desarrolló un ensayo, el test de Taylor, para evaluar el comportamiento plástico de los materiales bajo condiciones de impacto [13].

En el test de Taylor, una probeta cilíndrica impacta contra una superficie rígida. Tras el impacto, se miden las longitudes de las zonas deformadas elástica y plásticamente mediante medidas de dureza. Taylor sugirió una relación entre las longitudes mencionadas, la velocidad de impacto y la densidad con el límite elástico del material. La ecuación 5.1 muestra la relación sugerida por Taylor [3].

$$\bar{\sigma} = \frac{(L_0 - L_{pl}) \rho V^2}{2(L_0 - L_1) \ln(L_0/L_{pl})} \quad (5.1)$$

Donde  $L_0$  es la longitud inicial de la probeta,  $L_1$  la longitud de la probeta tras el impacto,  $L_{pl}$  la longitud de la zona deformada plásticamente,  $\rho$  la densidad del material y  $V$  la velocidad de impacto.

Con esta relación aparecen incertidumbres:

- La velocidad de impacto no es uniforme.
- La velocidad de avance del frente de onda plástica no es constante.
- La determinación de las longitudes siempre será imprecisa.

El test de Taylor permite obtener grandes deformaciones y muy altas velocidades de deformación (hasta  $\dot{\epsilon} = 10^5 s^{-1}$ ), sin embargo, a las incertidumbres presentadas previamente se une la dificultad de determinar con exactitud la velocidad de deformación real presente en el proceso de deformación.

La figura 5.1 muestra una simulación llevada a cabo en el departamento dónde este proyecto de fin de carrera ha sido desarrollado. En esta figura se muestran tres instantes de la simulación.

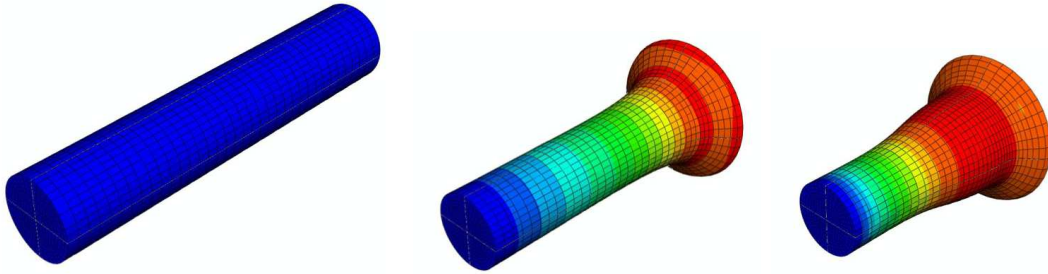


Figura 5.1: Simulación del test de Taylor [20]

Para una mayor claridad, se muestra otra simulación de este mismo departamento (figura 5.2).

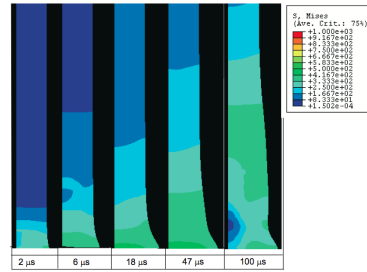


Figura 5.2: Simulación del test de Taylor [21]

## 5.2. El test de expansión de anillos

El ensayo de expansión del anillo tiene su origen en la limitación del ensayo de tracción dinámica de caracterizar el comportamiento de materiales a grandes velocidades. Cuando en un ensayo de tracción dinámica se aumenta la velocidad aplicada en la probeta, la ductilidad aumenta hasta que se alcanza la velocidad crítica de impacto. Con velocidades mayores que la velocidad crítica de impacto tiene lugar una caída repentina de la ductilidad [14]. Von Karman analizó el motivo de esta caída repentina de la ductilidad llegando a la siguiente conclusión: a velocidades superiores a la velocidad crítica de impacto, la onda plástica que se desplaza del extremo en movimiento al extremo fijo, no se propaga con la misma velocidad que lo hace el extremo móvil, por lo que se concentra la deformación y como consecuencia la probeta rompe en la cercanía al extremo móvil, sin apenas deformarse de forma homogénea <sup>1</sup> [15]. La limitación del ensayo de tracción dinámica es resuelta mediante una probeta cargada de tal forma que tanto su geometría como su estado de cargas cumplan simetría axial [16]. El ensayo de expansión del anillo cumple con estos requisitos.

El test de expansión del anillo consiste en un anillo cargado mediante explosivos o campos electromagnéticos en el cual desaparecen las dificultades del ensayo de tracción dinámica originadas en la influencia de la propagación de ondas. Así, en el ensayo de expansión del anillo se consigue incrementar la carga última en un 80 % respecto a la carga obtenida en el caso estático para el aluminio y en un 50 % en cobre a velocidades de expansión de  $100\text{ms}^{-1}$ , obtenidas mediante la aplicación de explosivos [16].

Si se analizan los fenómenos que tienen lugar en el proceso de expansión del anillo hay tres candidatos que pueden dar lugar a un incremento en la ductilidad [16]:

<sup>1</sup>Deformación homogénea es la deformación no localizada que tiene lugar en la probeta

- Cambios en el comportamiento del modelo constitutivo.
- Generación de calor.
- Efectos inerciales.

La figura 5.3 muestra las dos configuraciones posibles para el ensayo de expansión de anillos.

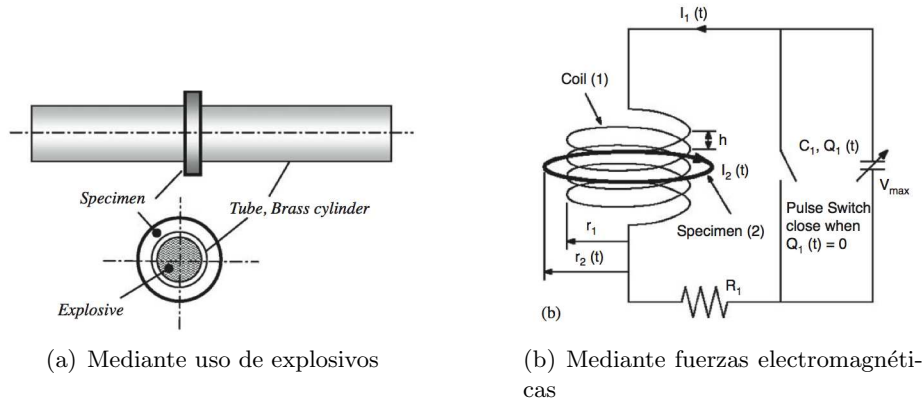


Figura 5.3: Esquema del ensayo de expansión de anillos [19]

De los citados anteriormente, los efectos inerciales son los que mayor peso tienen. Numerosos estudios dan forma a este concepto. Cabe destacar el análisis llevado a cabo por Needleman en el que se concluye que la inercia del material puede retrasar la localización de la deformación disminuyendo la triaxialidad tensional en el centro del cuello de estricción [16].

Altynova, Hu y Daehn [17] tomaron medidas de microdureza en las zonas deformadas homogéneamente de un anillo. De forma opuesta a lo que esperaban estos investigadores, los valores de microdureza obtenidos no diferían mucho entre sí. Estos incrementos en microdureza concuerdan con los incrementos en deformación obtenidos por el incremento en la velocidad de la carga y no parece haber relación con el aumento de la velocidad de expansión. Nótese que los valores obtenidos a distintas velocidades de expansión no diferían apenas de los obtenidos en un ensayo cuasiestático llevado a cabo para este mismo artículo [17]. Así, estos autores sugieren que el aumento en ductilidad observado en el test de expansión de anillos no debe estar provocado por un cambio en las características

del modelo constitutivo. En este estudio se propone la aceleración circunferencial como responsable del retardo en la localización de la deformación.

### 5.2.1. Aspectos experimentales

La expansión del anillo se lleva a cabo experimentalmente mediante el uso de explosivos o de inducción electromagnética en el caso de ensayos dinámicos y mediante contenedores con aceite a presión para ensayos estáticos [18]. La inducción electromagnética presenta ciertas ventajas respecto al uso de explosivos [14]:

- El movimiento se transmite mediante cargas volumétricas de forma continua.
- La velocidad de la carga se regula mediante el control del pulso de corriente inductora.
- La implementación del experimento es más viable en un entorno de laboratorio.

Aún así, a pesar de presentar las ventajas descritas anteriormente, aparecen inconvenientes como calor inducido en la probeta debido a la oposición de fuerzas entre corriente excitadora y la inducida. En la fragmentación del anillo también puede aparecer calentamiento, pero de forma más local, debido a la formación de arcos eléctricos [14].

La expansión de anillos mediante acción electromagnética consiste básicamente un condensador y un solenoide. La probeta (el anillo) se sitúa alrededor del solenoide para que al descargar el condensador, que previamente había sido cargado hasta alcanzar un determinado voltaje, se produzca una corriente de muy alta intensidad en el solenoide. Esta corriente da lugar a un campo electromagnético que a su vez da lugar a una corriente inducida en el anillo. Por último, debido a la ley de Lorentz, aparecen dos fuerzas opuestas y de repulsión, una actuando en el solenoide y otra en el anillo, lo que da lugar a la expansión del mismo [17]. Los voltajes a los que se cargan los condensadores son del orden de 10 kV y las energías de 6.25 kJ [17].

### 5.2.2. Historia del test de expansión de anillos

En este apartado se muestra un resumen en forma de tabla (tabla 5.1) de las principales aportaciones por y para el ensayo de expansión de anillos.

Karman y Duwez [15] estudiaron el motivo por el cual se alcanzaba una velocidad crítica de impacto en el ensayo de tracción simple. Niordson realizó el primer ensayo de expansión de anillos. Las posteriores entradas en la tabla estudiaron mediante simulaciones y ensayos las características de este ensayo.

Tabla 5.1: Historia del test de expansión de anillos

<b>Autor</b>	<b>Año</b>	<b>Contenido</b>
Karman y Duwez	1950	Análisis de la propagación de ondas plásticas
Niordson	1965	Primer ensayo de expansión del anillo
Hu y Dahlen	1996	Análisis unidimensional en ensayo de tracción simple y expansión del anillo
Altinova, Hu, S. Daehn	1996	Comparación de resultados experimentales de tres aleaciones con un modelo unidimensional
Rajendran y Fyfe	1982	Modelo teórico unidimensional incluyendo la formación de microvacíos como mecanismo de localización de la deformación
Grady y Benson	1982	Experimentos con inducción electromagnética
Rusinek, Zaera	2005	Simulación mediante elementos finitos teniendo en cuenta endurecimiento del material



## Capítulo 6

# Simulaciones

Este capítulo se divide en tres apartados. En el primer apartado se describe el modelo de elementos finitos desarrollado, en el segundo se explican los casos analizados y, finalmente, en el tercero se exponen y comentan los resultados obtenidos.

Las simulaciones representan de forma simplificada uno de los ensayos para caracterizar materiales a alta velocidad descrito en el capítulo 5, el ensayo de expansión de anillos. Para llevar a cabo los análisis se ha realizado un modelo de elementos finitos en el cual una subrutina escrita en FORTRAN gobierna el comportamiento material del modelo. El programa comercial de elementos finitos utilizado es ABAQUS/Explicit.

### 6.1. Descripción del modelo de elementos finitos

En este apartado se detalla como se ha realizado el modelo de elementos finitos que representa el ensayo de expansión de anillos.

#### 6.1.1. Geometría y mallado

El componente estudiado en las simulaciones es un anillo de sección cuadrada. Se estudian dos anillos que difieren el uno del otro en su radio interno. La figura 6.1 muestra los dos anillos estudiados y su sección, que es común.

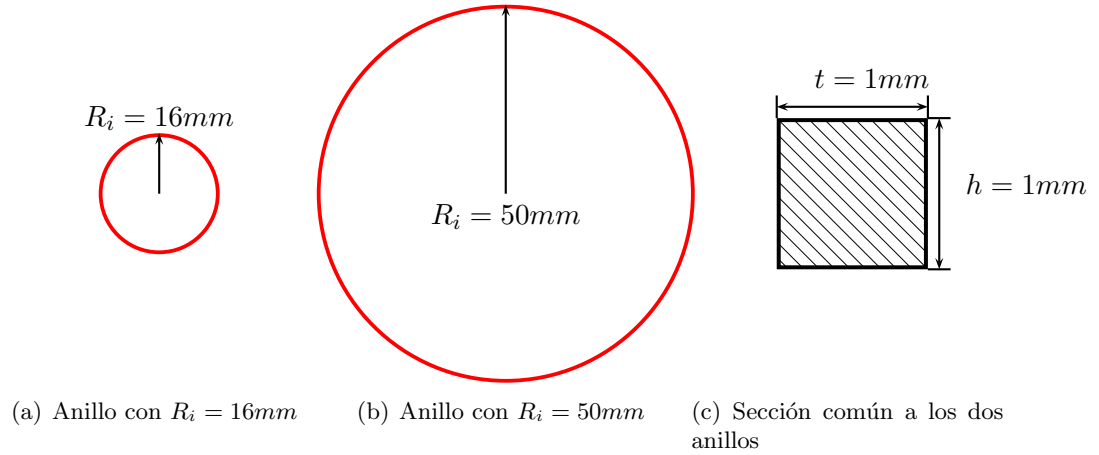


Figura 6.1: Geometría del modelo. Anillos y sección

Un aspecto muy importante de un modelo de elementos finitos es el mallado. Un mal mallado puede llevar a una mala aproximación de los resultados. El mallado de los anillos se ha realizado de forma sistemática, quedando totalmente definido a partir del número de elementos por espesor. A continuación se define el proceso seguido para el mallado:

1. Se divide el espesor del anillo en  $n$  trozos iguales y se obtiene la longitud característica del lado de los elementos( $l_c$ ).
2. A partir de la longitud característica obtenida se divide la altura en los trozos necesarios de forma que la longitud de cada trozo( $l_h$ ) sea lo más parecida posible a la longitud característica del elemento obtenida en el paso anterior.
3. Por último se divide la longitud de la circunferencia definida por el radio interior en los trozos necesarios para obtener una longitud de cada trozo ( $l_{arc}$ ) lo más parecida posible a la longitud característica obtenida en el primer paso.

Siguiendo este método, la relación de aspecto de los elementos ( $l_c : l_h : l_{arc}$ ) es lo más próxima posible a 1:1:1, dando lugar a mejores aproximaciones en los resultados. La figura 6.2 muestra dos detalles del mallado obtenido.

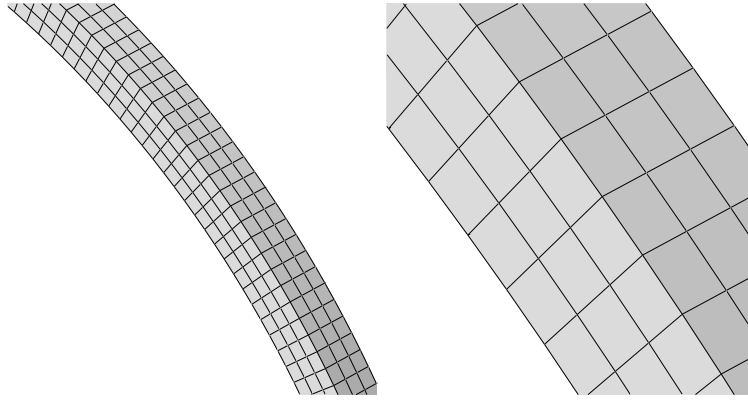


Figura 6.2: Detalle del mallado de los anillos

Siguiendo el mismo proceso con los dos anillos, se obtiene el mallado que se muestra en la figura 6.3. Esta figura muestra una imagen de cada anillo y un corte de cualquiera de ellos para ver en detalle la sección.

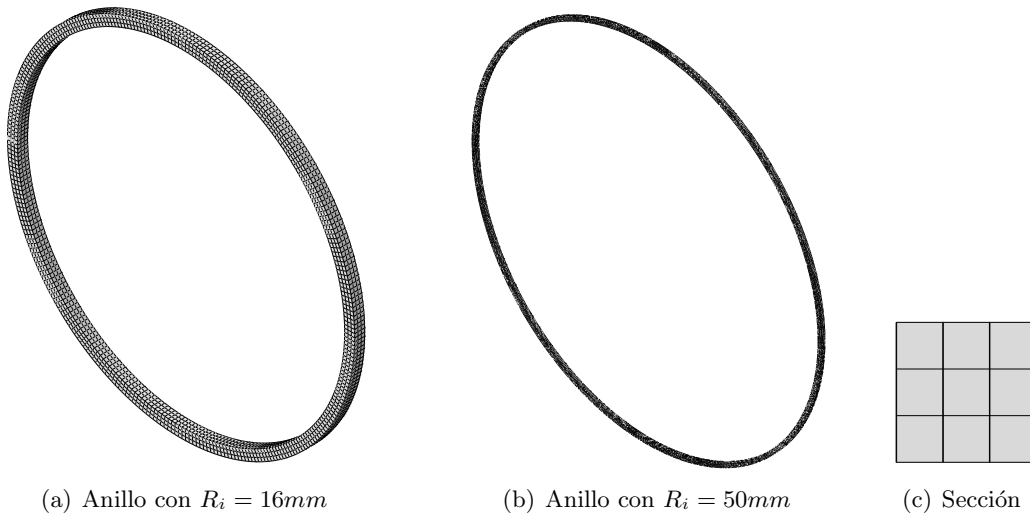


Figura 6.3: Mallado de los anillos

La malla está formada por elementos hexaédricos C3D8R [25]. En el caso del anillo con  $R_i = 16mm$  la malla se compone de 2709 elementos y en el de  $R_i = 50mm$  de 8478 elementos. Los elementos C3D8R son elementos tridimensionales de ocho nodos y con un

sólo punto de integración. A estos elementos se les califica como elementos de integración reducida. La integración tiene lugar en los denominados puntos de Barlow, que si se comparan con los de Gauss ofrecen una mayor precisión y un menor coste computacional. El inconveniente es un fenómeno de origen numérico que da lugar a modos de deformación con energía asociada nula. Este fenómeno da lugar a una forma muy característica de la cual toma el nombre, *hourglass*, que en castellano significa reloj de arena. En caso de observarse este fenómeno, ABAQUS permite al usuario añadir una acción de reducción de este efecto. Para conseguir reducir el *hourglass* ABAQUS aumenta la rigidez de los elementos. El parámetro de control para evaluar si la energía añadida al modelo es lo suficientemente pequeña para que el modelo sea válido, es la energía artificial (ALLAE) [20]. La figura 6.4 muestra una malla que al deformarse sufre del efecto *hourglass*.

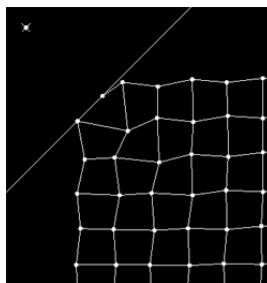


Figura 6.4: Ejemplo de malla con efecto de *hourglass*

### 6.1.2. Material

El material utilizado es un acero al carbono ampliamente utilizado en la industria del automóvil cuyas propiedades mecánicas son conocidas. Tiene un tamaño de grano  $\phi = 16\mu m$ , es isótropo y muestra tanto sensibilidad a la velocidad de deformación como a la temperatura [10].

El modelo de Gurson ha sido implementado con la ley de endurecimiento de Johnson-Cook. La ley de endurecimiento de Johnson-Cook incluye los efectos de endurecimiento por deformación y velocidad de deformación así como de ablandamiento por incremento de temperatura. El diagrama de flujo mostrado en la figura 4.1 muestra la función *Endurecimiento* sin especificar Johnson-Cook, ya que se podría haber elegido otra distinta. El modelo de Gurson no tiene asociada una ley de endurecimiento concreta.

La tabla 6.1 muestra las propiedades mecánicas del material así como los parámetros

necesarios para definir el modelo de Johnson Cook.

Tabla 6.1: Propiedades del material

Propiedad	Unidades	Valor
Módulo de Young ( $E$ )	$GPa$	202
Coeficiente de Poisson ( $\mu$ )	-	0,3
Constante del material ( $A$ )	$MPa$	57,27
Constante del material ( $B$ )	$MPa$	479,93
Coeficiente de endurecimiento por deformación ( $n$ )	-	0,316
Constante del material ( $C$ )	-	0,0362
Velocidad de deformación de referencia ( $\dot{\epsilon}_0$ )	$s^{-1}$	$10^{-5}$
Exponente de reblandecimiento por temperatura ( $m$ )	-	0,28
Temperatura de referencia ( $T_0$ )	$K$	300
Temperatura de fusión ( $T_m$ )	$K$	1600
Calor específico ( $C_p$ )	$Jkg^{-1}K^{-1}$	470
Constante de Quinney-Taylor ( $\eta$ )	-	0,9

### 6.1.3. Condiciones de contorno

Para simular la expansión del anillo, se ha impuesto una velocidad radial que se puede dividir en dos etapas:

- Una velocidad radial en el instante inicial en todos los nodos del anillo.
- Una velocidad radial constante durante toda la simulación en los nodos de la cara interna del anillo.

Estas dos etapas se representan en la figura 6.5.

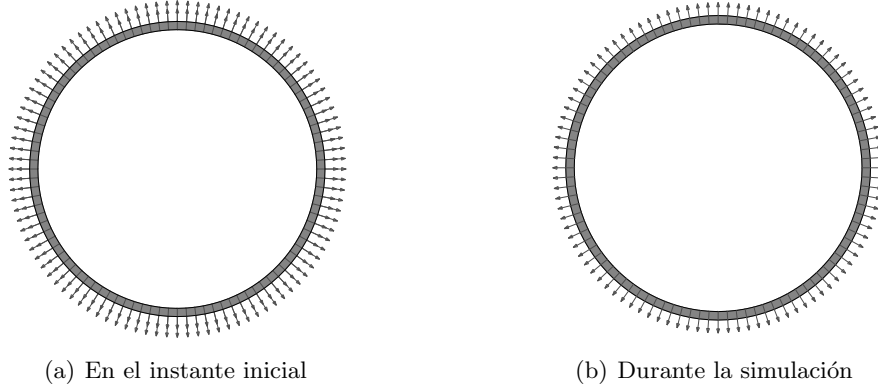


Figura 6.5: Condición de contorno

#### 6.1.4. Valores iniciales

En el modelo implementado hay cinco variables de estado  $(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \rho, f, T)$ . Es necesario darles valor en el instante  $t = 0s$ . La tabla 6.2 muestra los valores asignados a cada una de las variables de estado. Nótese que la fracción de microvacíos ( $f$ ), no tiene un valor fijo ya que va a ser un parámetro variable.

Tabla 6.2: Valores iniciales

Variable	Unidades	Valor
Deformación plástica equivalente ( $\bar{\epsilon}^p$ )	-	0
Velocidad de deformación plástica equivalente ( $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ )	$s^{-1}$	0
Densidad ( $\rho$ )	$kgm^{-3}$	7800
Fracción de microvacíos ( $f$ )	-	Parámetro variable
Temperatura ( $T$ )	K	300

## 6.2. Descripción de los casos analizados

Se han analizado dos geometrías distintas y para cada una de estas geometrías, tres velocidades de expansión, lo que da lugar a seis escenarios distintos. Cada uno de estos

escenarios queda definido por una geometría y una velocidad de expansión. En cada uno de estos escenarios se va a variar la fracción de microvacíos inicial para ver la influencia de este parámetro. La tabla 6.3 recoge esta información.

Tabla 6.3: Escenarios estudiados en las simulaciones

<b>Escenario</b>	$R_i(mm)$	$V_r(ms^{-1})$
1	16	250
2	16	350
3	16	450
4	50	250
5	50	350
6	50	450

Las fracciones de microvacíos seleccionadas para analizar su influencia son:

- $f = 1 \cdot 10^{-10}$ : Representa un material sin daño. El criterio de plastificación con  $f \approx 0$  es un criterio  $J_2$  (ver apartados 2.3.2 y 4.1 para más detalles).
- $f = 1 \cdot 10^{-3}$ : Es la fracción de microvacíos inicial típica en aceros [7].
- $f = 1 \cdot 10^{-1}$ : Es un valor de fracción de microvacíos extremo para ver la influencia de este parámetro, no pretende reflejar un valor de daño inicial presente en la realidad.

Por tanto se han realizado un total de 18 simulaciones cuyos resultados se presentan a continuación.

### 6.3. Resultados

Los resultados obtenidos en las simulaciones se dividen en dos apartados. El primero muestra los resultados vinculados al ensayo y el segundo muestra el comportamiento material obtenido. Previamente a estos dos apartados se incluye un ejemplo de cómo se han validado los análisis.

### 6.3.1. Validación de los análisis

En el apartado 4.4 se menciona que en la subrutina se comete un error a la hora de calcular la presión ( $p$ ). Este error ha de ser controlado. Así, para evaluar la magnitud del error y validar los análisis, se obtiene la variable de control  $e$ , que se muestra en la ecuación 6.1.

$$e = \left| \frac{p^* - p}{p^*} \right| = \left| \frac{3K\alpha\Delta\theta}{p^{trial} + K\Delta\epsilon_p} \right| \quad (6.1)$$

Dónde  $p^*$  es la presión calculada en la subrutina y  $p$  es la presión según la ecuación 4.28.

La variable  $e$  permanece en valores muy bajos (por debajo de 0.01) en todos los elementos del anillo y durante todo el análisis, a excepción de elementos que se distorsionan mucho, sobre todo al final de los análisis. Durante la fase de deformación homogénea <sup>1</sup> no hay ningún elemento con la variable  $e$  mayor de 0.01. En la figura 6.6 se muestran los elementos que superan este valor en un instante de tiempo concreto ( $t = 1,26 \cdot 10^{-4}s$ ) para el caso con  $f_0 = 0,001$  del escenario 1. Se puede ver como estos elementos están muy distorsionados y, por tanto, no son representativos.

---

<sup>1</sup>Se conoce como fase de deformación homogénea a la parte de la simulación en la que la deformación no se localiza en los cuellos de estrangulación.



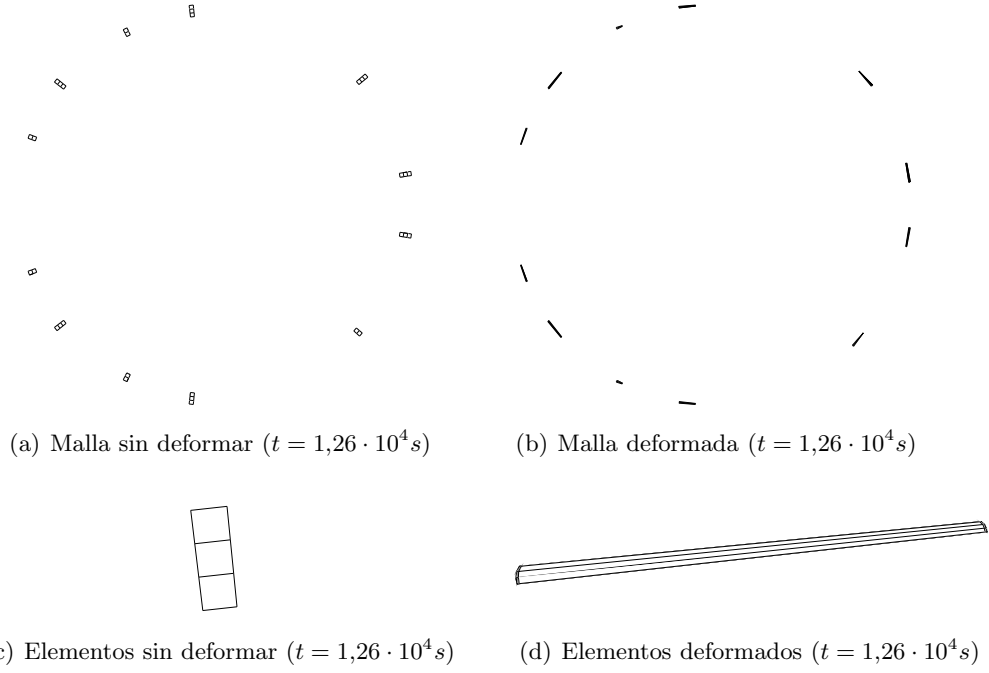


Figura 6.6: Elementos cuyo error en el cálculo de la presión ( $p$ ) es mayor del 1 %. Caso con  $R_i = 16$ ,  $V = 250ms^{-1}$  y  $f_0 = 0,001$

### 6.3.2. Resultados vinculados al ensayo de expansión de anillos

El ensayo de expansión de anillos es un ensayo del que, experimentalmente, es difícil obtener resultados. El principal dato que se obtiene tras realizar un ensayo de expansión de anillos es el número de trozos en que el anillo se fragmenta. La tabla 6.4 muestra el número de fragmentos en cada una de las simulaciones.

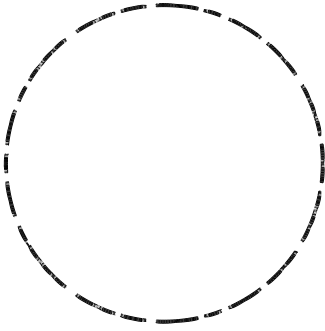
Tabla 6.4: Número de trozos obtenidos en cada simulación

Escenario	$f_0 = 1 \cdot 10^{-10}$	$f_0 = 1 \cdot 10^{-3}$	$f_0 = 1 \cdot 10^{-1}$
1 ( $R = 16mm, v = 250ms^{-1}$ )	26	26	22
2 ( $R = 16mm, v = 350ms^{-1}$ )	33	33	27
3 ( $R = 16mm, v = 450ms^{-1}$ )	44	44	35
4 ( $R = 50mm, v = 250ms^{-1}$ )	31	34	26
5 ( $R = 50mm, v = 350ms^{-1}$ )	42	41	29
6 ( $R = 50mm, v = 450ms^{-1}$ )	43	50	37

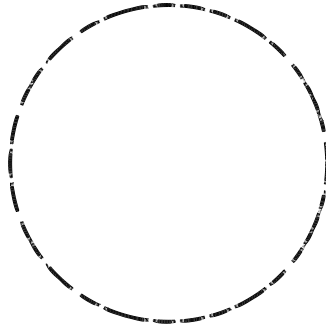
#### 6.3.2.1. Fragmentación de los anillos

En este apartado se muestran la fragmentación de los anillos en cada una de las simulaciones. Para considerar la fragmentación de un anillo es necesario tener en cuenta un criterio de fallo. En este proyecto se ha utilizado el mismo criterio que en trabajos previos sobre expansión de anillos [10]. El fallo de un punto material se alcanza cuando la deformación plástica equivalente alcanza un valor límite, en este caso constante y de valor 1,2.

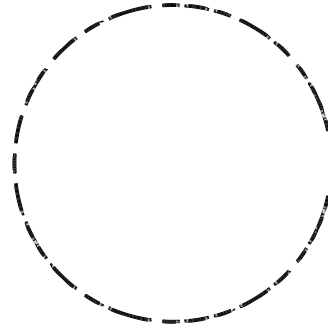
A continuación se muestran imágenes de la fragmentación de los anillos para cada uno de los escenarios definidos en el apartado 6.3. Las figuras 6.7 y 6.8 muestran los anillos (ya fragmentados) con  $R_i = 16mm$  y  $R_i = 50mm$  respectivamente.



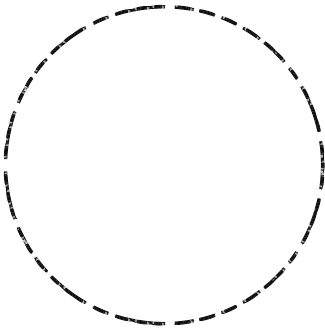
(a)  $f_0 = 1 \cdot 10^{-1}, V = 250ms^{-1}$   
( $t = 9,40 \cdot 10^5 s$ )



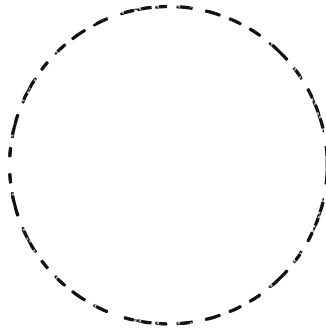
(b)  $f_0 = 1 \cdot 10^{-3}, V = 250ms^{-1}$   
( $t = 9,00 \cdot 10^5 s$ )



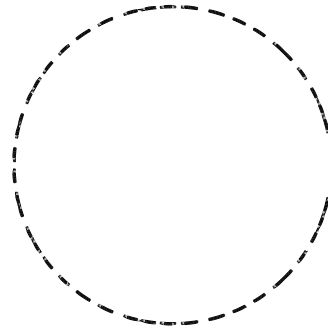
(c)  $f_0 = 1 \cdot 10^{-10}, V = 250ms^{-1}$   
( $t = 9,20 \cdot 10^5 s$ )



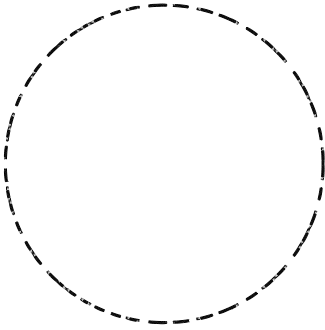
(d)  $f_0 = 1 \cdot 10^{-1}, V = 350ms^{-1}$   
( $t = 8,00 \cdot 10^5 s$ )



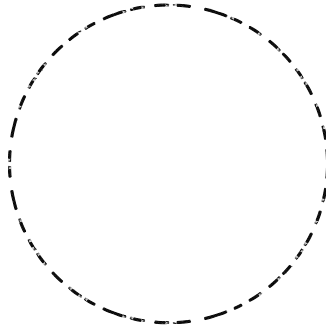
(e)  $f_0 = 1 \cdot 10^{-3}, V = 350ms^{-1}$   
( $t = 8,80 \cdot 10^5 s$ )



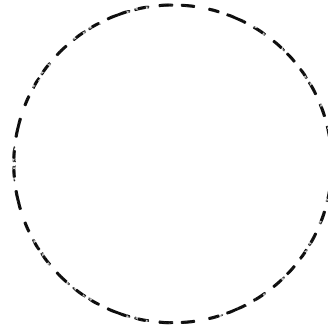
(f)  $f_0 = 1 \cdot 10^{-10}, V = 350ms^{-1}$   
( $t = 8,00 \cdot 10^5 s$ )



(g)  $f_0 = 1 \cdot 10^{-1}, V = 450ms^{-1}$   
( $t = 7,80 \cdot 10^5 s$ )



(h)  $f_0 = 1 \cdot 10^{-3}, V = 450ms^{-1}$   
( $t = 7,20 \cdot 10^5 s$ )



(i)  $f_0 = 1 \cdot 10^{-10}, V = 450ms^{-1}$   
( $t = 7,20 \cdot 10^5 s$ )

Figura 6.7: Fragmentación del anillo con  $R_i = 16mm$

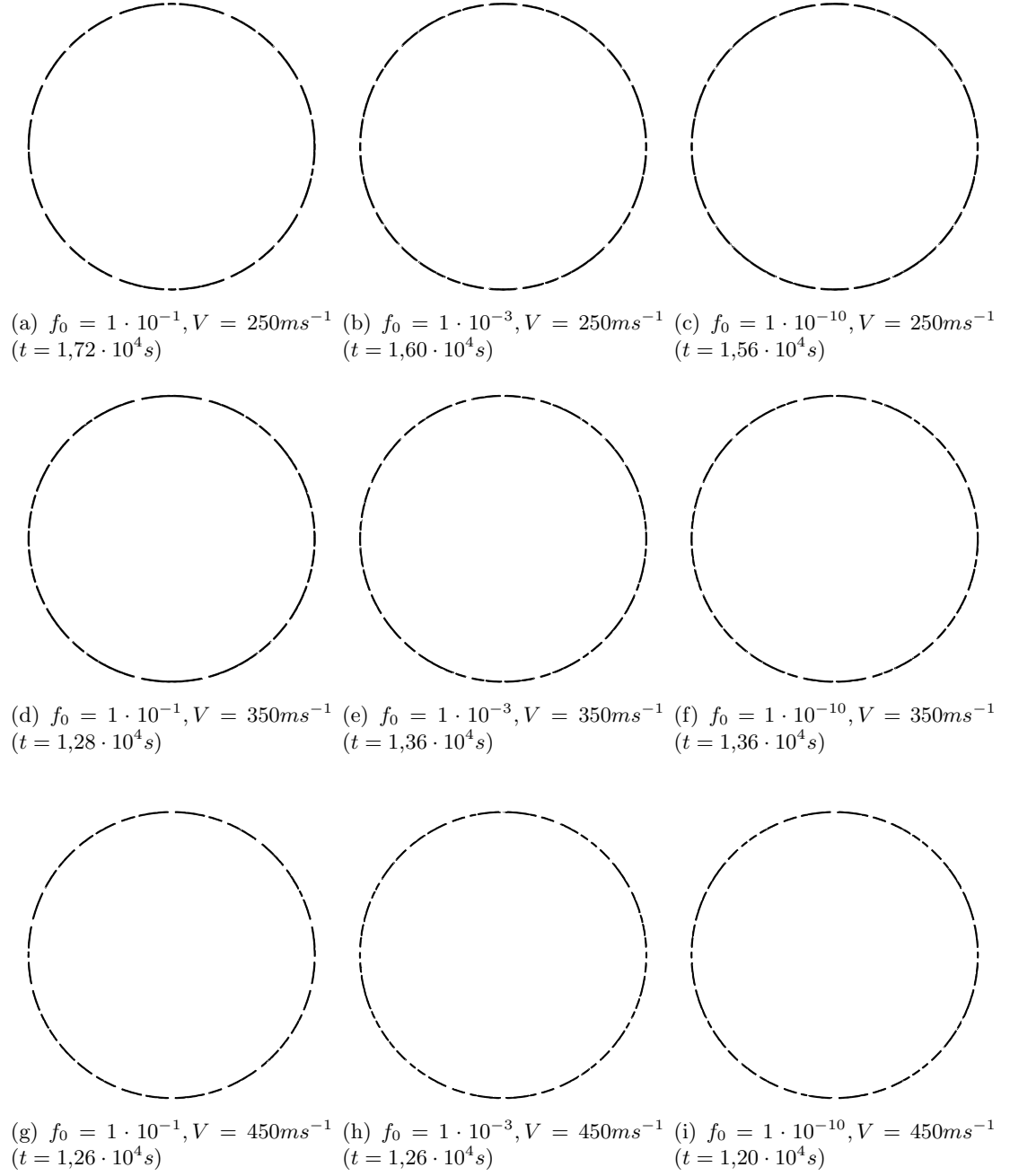


Figura 6.8: Fragmentación del anillo con  $R_i = 50mm$

Se puede ver como en todos los escenarios el patrón de comportamiento en cuanto al número de trozos es el mismo: el número de fragmentos entre el caso con  $f_0 = 1 \cdot 10^{-10}$  y el caso con  $f_0 = 1 \cdot 10^{-3}$  es prácticamente el mismo, mientras que en el caso con  $f_0 = 1 \cdot 10^{-1}$  se produce una notable reducción en el número de fragmentos en que el anillo queda dividido.

Para una mejor comprensión de la evolución del número de fragmentos con la fracción de microvacíos, se han realizado más simulaciones en el anillo con  $R_i = 16mm$  y  $V_r = 250m/s$ . Los resultados de este estudio permiten una visión más amplia de la evolución del número de fragmentos con la fracción de microvacíos inicial. La figura 6.9 muestra los datos obtenidos a partir de la ampliación de casos estudiados en el anillo de  $R_i = 16mm$ . Nótese que las subfiguras (a) y (b) dentro de la figura 6.9 contienen la misma información, pero con distinta escala en el eje de las abscisas.

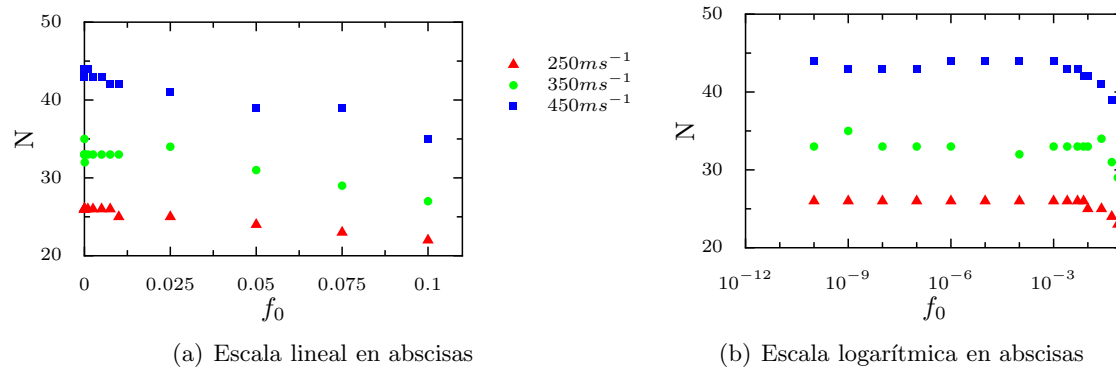


Figura 6.9:  $N$  frente a  $f_0$  para distintas velocidades de expansión (Anillo con  $R_i = 16mm$ )

La gráfica mostrada en la figura 6.9 confirma la evolución observada en la tabla 6.4 y en las figuras 6.7 y 6.8. Además, se puede extraer la siguiente información:

- Hay un valor límite de la fracción de microvacíos inicial por debajo del cual, su influencia en el número de fragmentos es despreciable.
- Al aumentar la fracción de microvacíos inicial, disminuye el número de fragmentos en que el anillo queda dividido.

#### 6.3.2.2. Evolución de las principales variables

En este apartado se muestra la evolución de las principales variables en el caso con  $R_i = 16mm$ ,  $V = 250ms^{-1}$  y  $f_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ . Si se muestra todo el anillo, se pierde detalle, por lo que se ha elegido una región significativa para mostrar los resultados. En esta región se observa tanto una zona de deformación homogénea, como una zona en la que, a partir de cierto instante, se forman cuellos de estrangulación.

La primera variable que se muestra es la tensión equivalente de Von Mises ( $q$ ). Las figuras 6.10 (a) y (b) representan claramente la fase de deformación homogénea. En las figuras 6.10 (c) y (d) se puede ver como se localiza la tensión en las zonas en las que, posteriormente, se va a localizar la deformación. En las figuras 6.10 (e) y (f) se puede apreciar como se forman los cuellos de estricción. Si se observan los valores límite alcanzados en la figura 6.10 (f), son ligeramente inferiores a los de la figura 6.10 (e). Las razones de esta ligera reducción son:

- Que en la competición entre el endurecimiento y el ablandamiento del material, comienza a ganar el ablandamiento.
- La descarga.

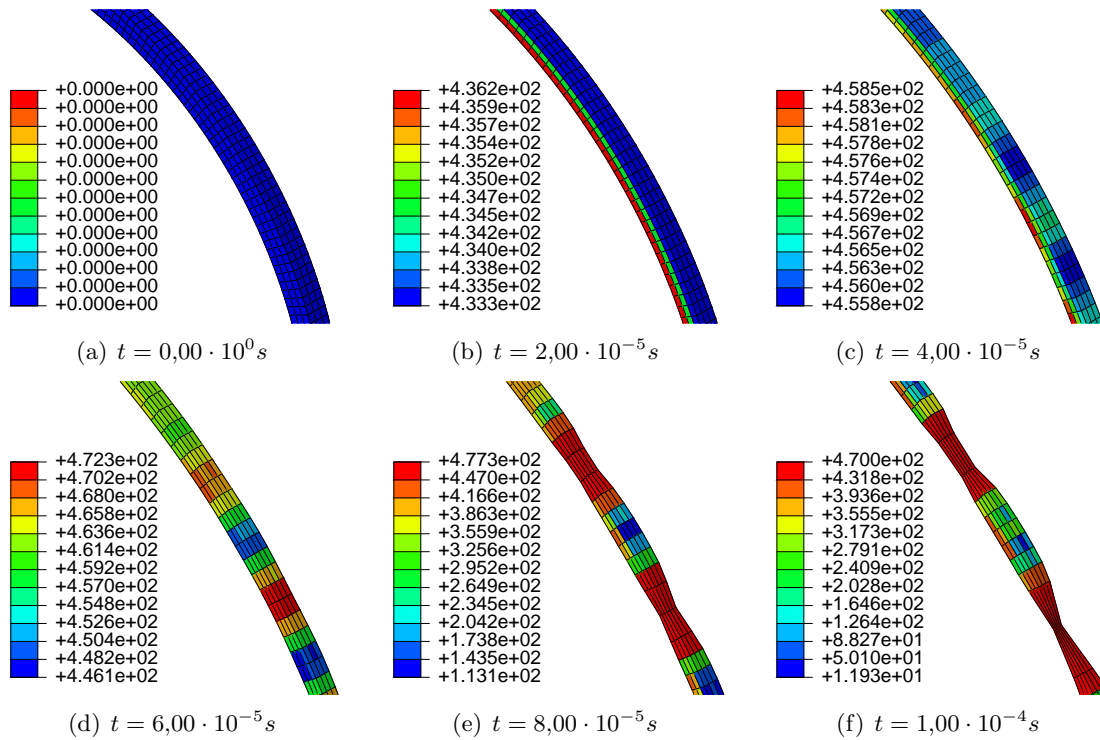


Figura 6.10: Evolución de la variable  $\bar{\sigma}$  en el caso  $R_i = 16mm, V = 250ms^{-1}, f_0 = 0,001$

La segunda variable que se muestra es la deformación plástica equivalente ( $\overline{\epsilon^p}$ ). La localización de la deformación tiene lugar algo más tarde que la de la tensión equivalente de Von Mises. Se puede ver como hasta la figura 6.11 (c) se puede considerar que la variable tiene una distribución homogénea. Si se observan las figuras 6.11 (e) y (f), se puede ver como el valor mínimo de ambos contornos permanece constante. La razón de que el mínimo no varíe es que, al localizarse la deformación en los cuellos de estricción, se produce una descarga en las zonas que se encuentran entre dos cuellos de estricción. La descarga es suficiente para que los elementos de esta región entren en régimen elástico, razón por la cual la deformación plástica equivalente se mantiene.

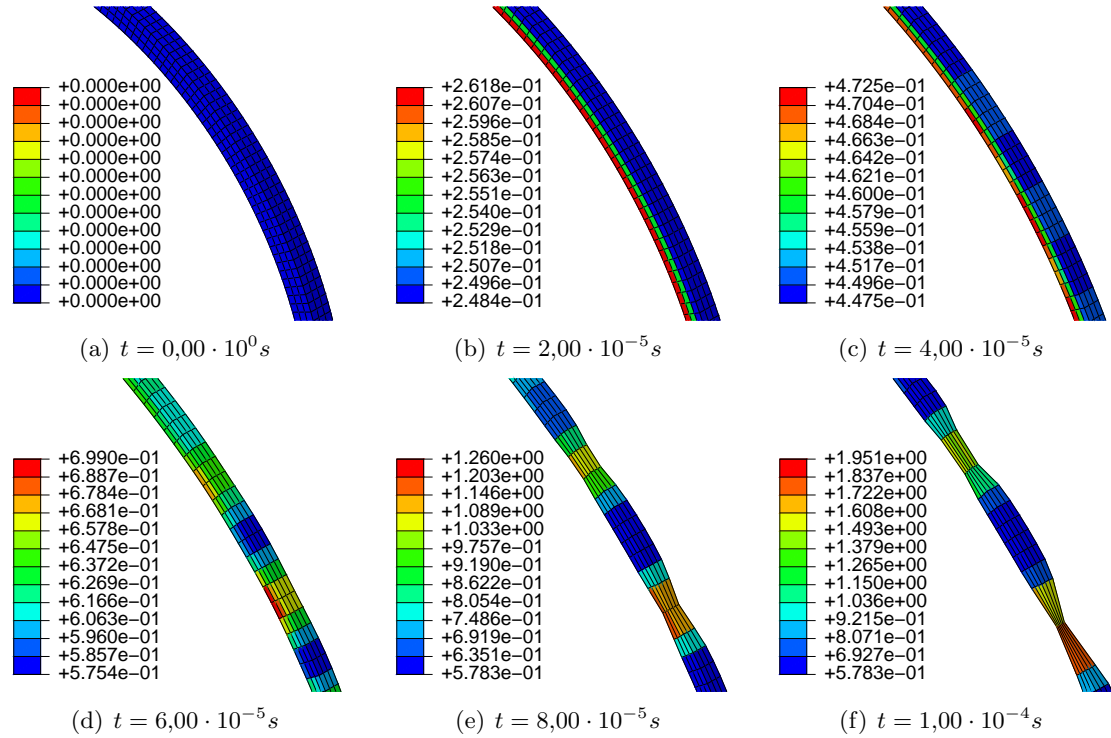


Figura 6.11: Evolución de la variable  $\overline{\epsilon^p}$  en el caso  $R_i = 16mm$ ,  $V = 250ms^{-1}$ ,  $f_0 = 0,001$



La siguiente variable de la que se muestra su evolución es la velocidad de deformación plástica equivalente ( $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ ). Gracias a esta variable se aprecia perfectamente el concepto de descarga explicado en la evolución de la deformación plástica equivalente. Obsérvese como en las figuras 6.12 (e) y (f) las zonas entre cuellos de estricción tienen valores de  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$  nulos, lo cual confirma que la descarga de estos elementos ha sido suficiente para entrar en régimen elástico.

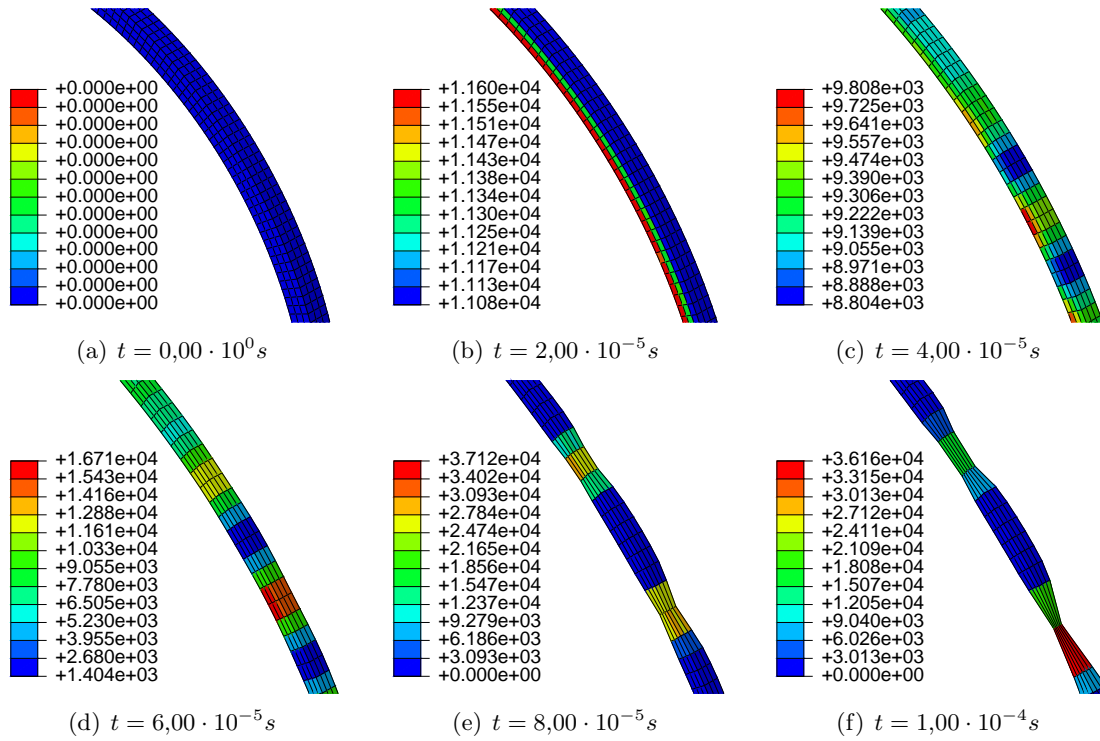


Figura 6.12: Evolución de la variable  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$  en el caso  $R_i = 16mm$ ,  $V = 250ms^{-1}$ ,  $f_0 = 0,001$

La figura 6.13 muestra la evolución de la fracción de microvacíos. En la figura 6.13 (a) se muestra como la fracción de microvacíos de  $1 \cdot 10^{-3}$ . Cabe resaltar de la evolución de la fracción de microvacíos, que en las figuras 6.13 (e) y (f) el mínimo permanece constante debido a la entrada en régimen elástico ya comentada previamente.

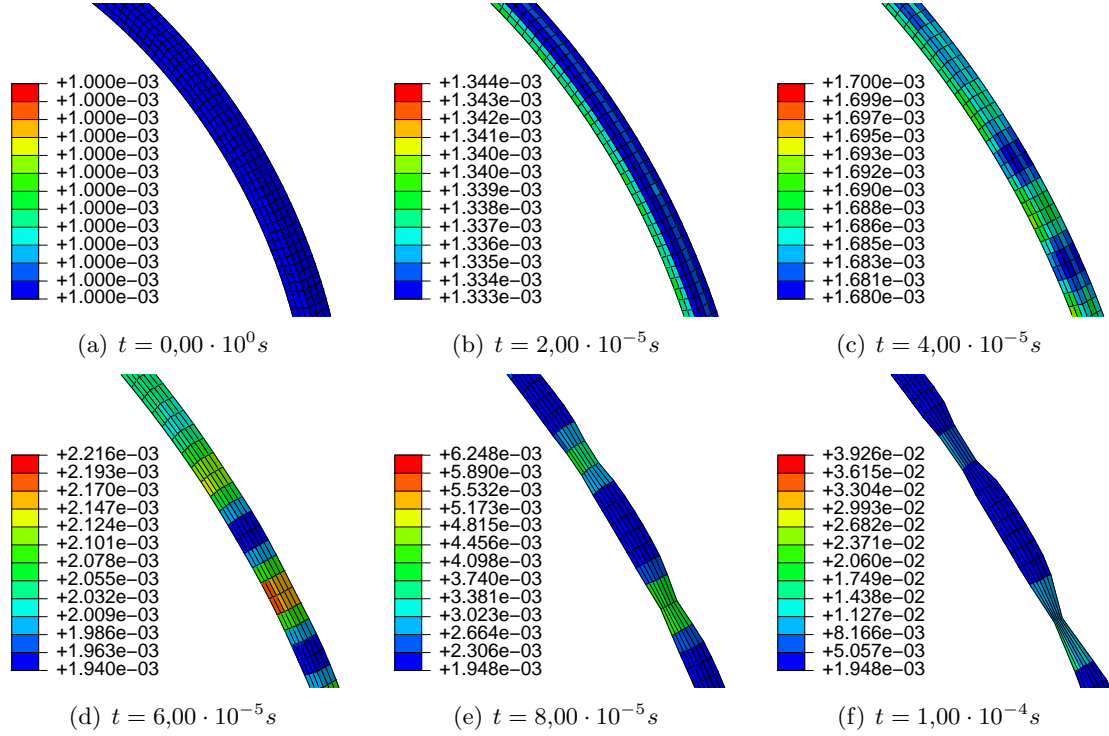


Figura 6.13: Evolución de la variable  $f$  en el caso  $R_i = 16mm, V = 250ms^{-1}, f_0 = 0,001$

Por último, se muestra la evolución de la temperatura. La figura 6.14 (a) muestra la temperatura inicial,  $300K$ . A partir de la figura 6.14, se puede ver como evoluciona la temperatura, siendo el incremento de temperatura mayor en los cuellos de estricción, donde la deformación se localiza y, como se puede ver en la figura 6.10, la tensión también. Además, se puede comprobar de nuevo la descarga elástica de los elementos situados entre dos cuellos de estricción, ya que al considerarse adiabaticidad y detenerse el trabajo plástico, la temperatura permanece constante.

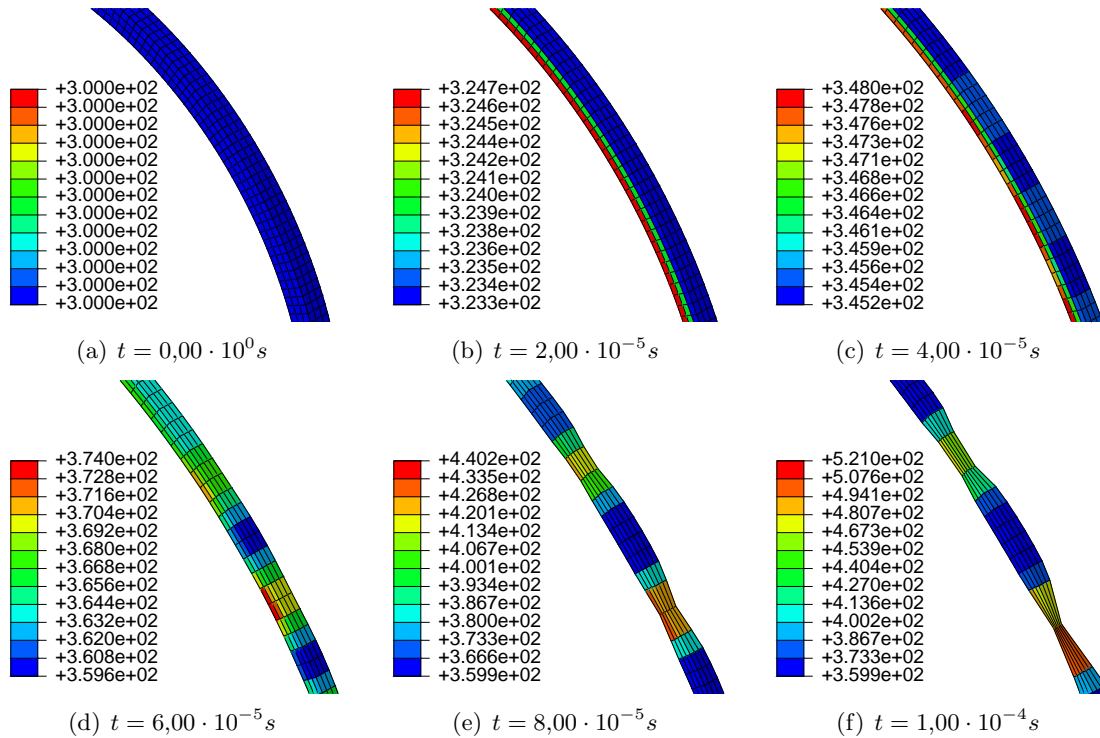


Figura 6.14: Evolución de la variable  $T$  en el caso  $R_i = 16mm, V = 250ms^{-1}, f_0 = 0,001$

### 6.3.3. Resultados vinculados al material

En este apartado se muestra el comportamiento del material obtenido en los escenarios descritos anteriormente. Para ello se ha seleccionado un elemento de cada simulación y, de éste, se ha extraído el valor de las variables que mejor caracterizan al material. Para cada simulación se ha representado la evolución de la tensión, de la velocidad de deformación plástica equivalente, de la temperatura y de la fracción de microvacíos frente a la deformación plástica equivalente, teniendo en cuenta que las variables que tienen unidades han sido adimensionalizadas.

La figura 6.15 muestra el elemento seleccionado en cada una de las simulaciones para obtener los datos.

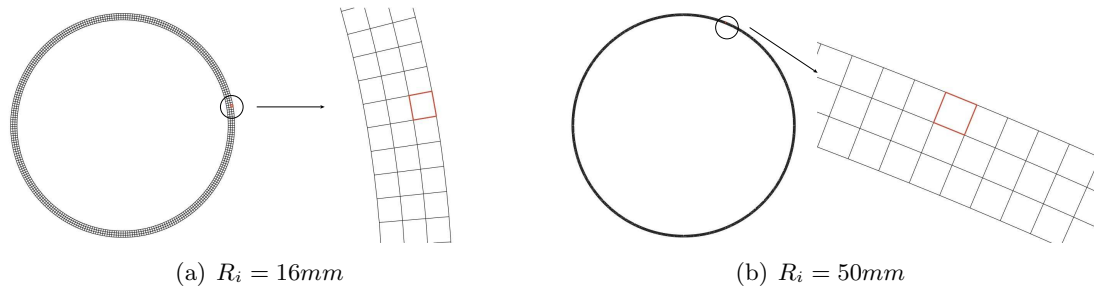


Figura 6.15: Elemento seleccionado para la obtención de datos

#### 6.3.3.1. Adimensionalización de variables

La fracción de microvacíos no tiene unidades, por lo que no se ha adimensionalizado.

La tensión equivalente de Von Mises se ha adimensionalizado con el límite elástico inicial, es decir, la constante  $A$  de las propiedades del material en el modelo de Johnson Cook (ver tabla 6.1).

La temperatura se ha adimensionalizado mediante la temperatura inicial y la temperatura de fusión como se muestra en la ecuación 6.2. Nótese que la temperatura adimensionalizada es cero para  $\theta = \theta_0$  y la unidad para  $\theta = \theta_m$ . Además, por la hipótesis de

adiabaticidad, nunca podrá ser menor que cero.

$$\frac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0} \quad (6.2)$$

La velocidad de deformación plástica equivalente se ha adimensionalizado con la velocidad de deformación que debería tener cualquier punto del anillo bajo la suposición de que tanto el espesor como la altura son despreciables frente al radio.

$$\dot{\epsilon}_{hom}(t) = \frac{V}{R(t)} = \frac{V}{R_0 + \int_0^t V dt} \approx \frac{V}{R_0 + \sum_{i=0}^n (V \cdot \Delta t_i)} = \frac{V}{R_0 + V \sum_{i=0}^n \Delta t_i} \quad (6.3)$$

En la ecuación 6.3 el subíndice *hom* indica homogeneidad, ya que la ecuación anterior es una aproximación válida únicamente cuando el anillo se deforma de forma homogénea.

### 6.3.3.2. Escenario 1

En la figura 6.16 se presentan las gráficas obtenidas en el escenario 1 ( $R_i = 16mm, V = 250ms^{-1}$ )

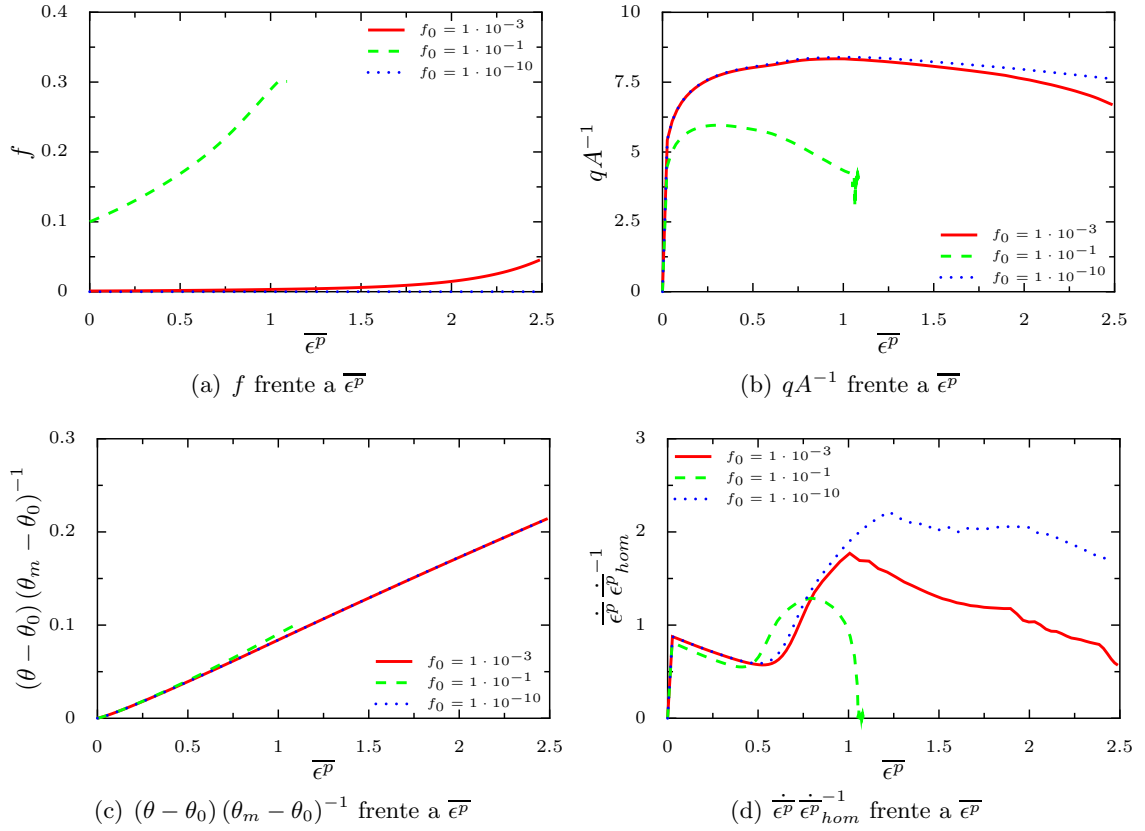


Figura 6.16: Comportamiento material obtenido en el escenario 1 ( $R = 16mm, V = 250ms^{-1}$ )

### 6.3.3.3. Escenario 2

En la figura 6.17 se presentan las gráficas obtenidas en el escenario 2 ( $R_i = 16mm, V = 350ms^{-1}$ )

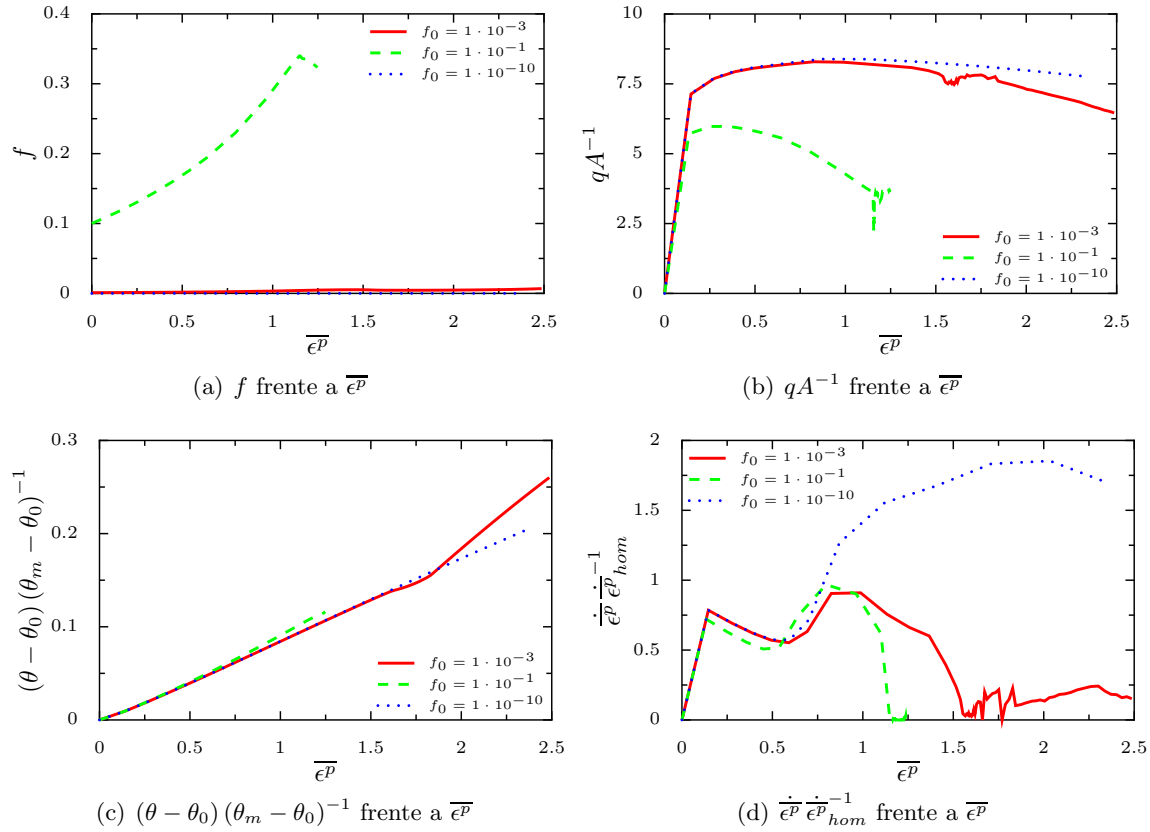


Figura 6.17: Comportamiento material obtenido en el escenario 2 ( $R = 16mm, V = 350ms^{-1}$ )

### 6.3.3.4. Escenario 3

En la figura 6.18 se presentan las gráficas obtenidas en el escenario 3 ( $R_i = 16mm, V = 450ms^{-1}$ )

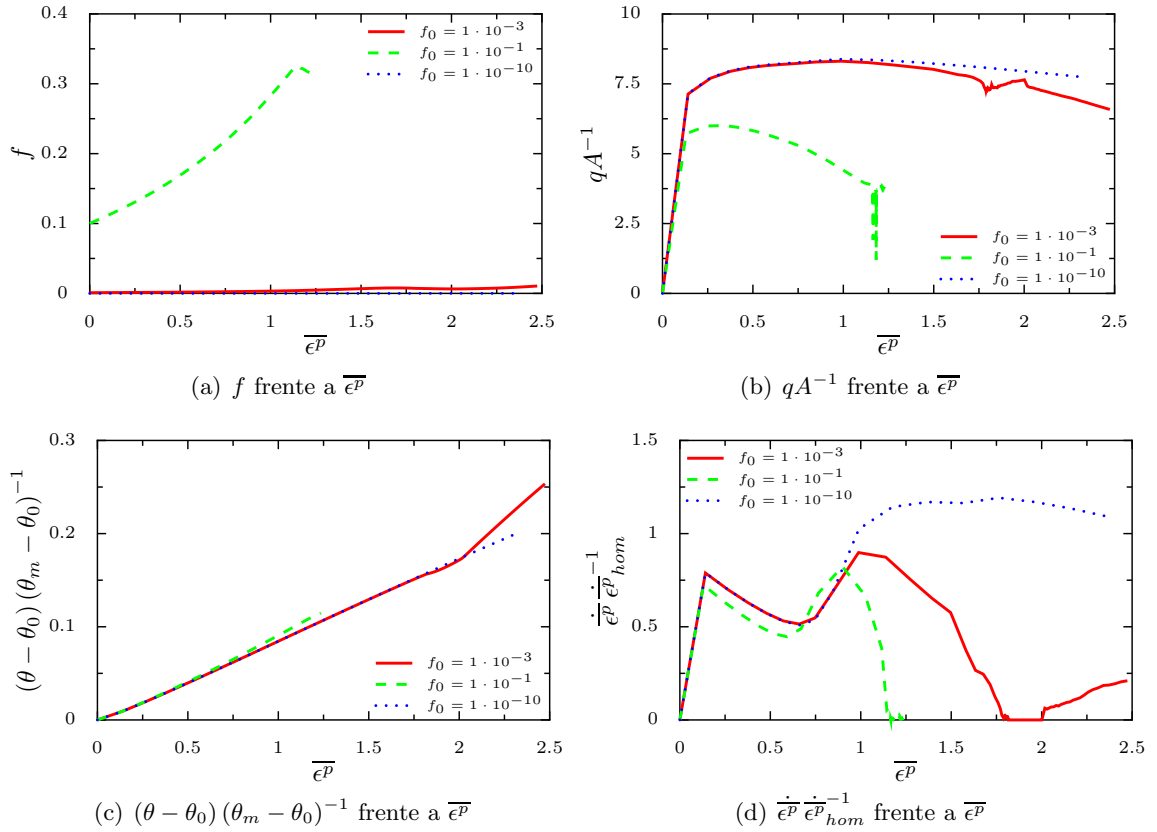


Figura 6.18: Comportamiento material obtenido en el escenario 3 ( $R = 16mm, V = 450ms^{-1}$ )



### 6.3.3.5. Escenario 4

En la figura 6.19 se presentan las gráficas obtenidas en el escenario 4 ( $R_i = 50mm, V = 250ms^{-1}$ )

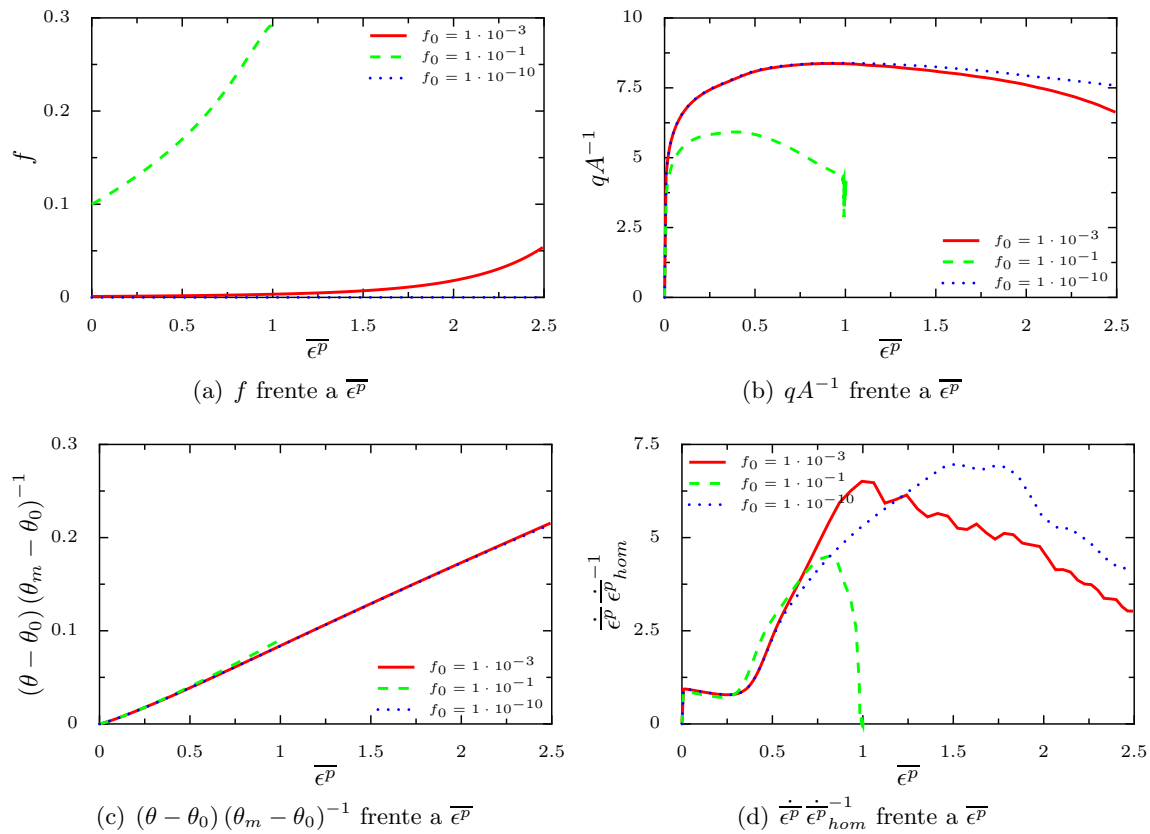


Figura 6.19: Comportamiento material obtenido en el escenario 4 ( $R = 50mm, V = 250ms^{-1}$ )

### 6.3.3.6. Escenario 5

En la figura 6.20 se presentan las gráficas obtenidas en el escenario 5 ( $R_i = 50mm, V = 350ms^{-1}$ )

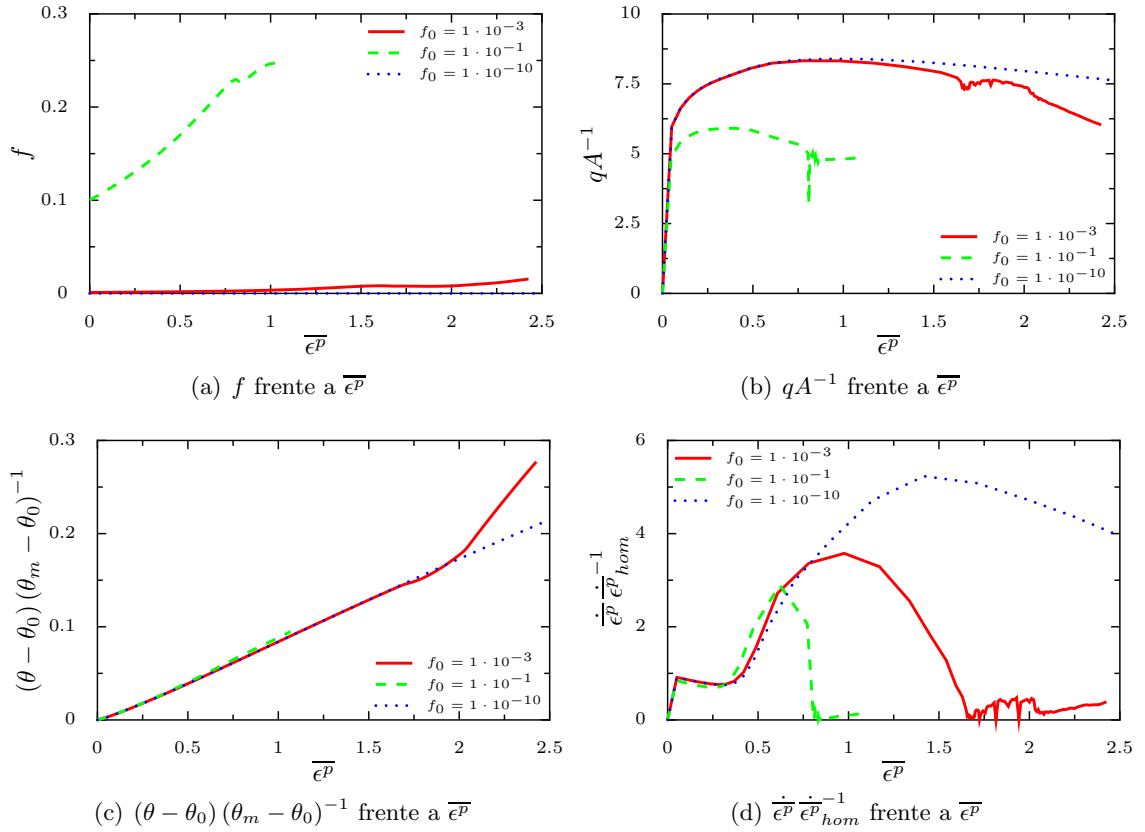


Figura 6.20: Comportamiento material obtenido en el escenario 5 ( $R = 50mm, V = 350ms^{-1}$ )

### 6.3.3.7. Escenario 6

En la figura 6.21 se presentan las gráficas obtenidas en el escenario 6 ( $R_i = 50mm, V = 450ms^{-1}$ )

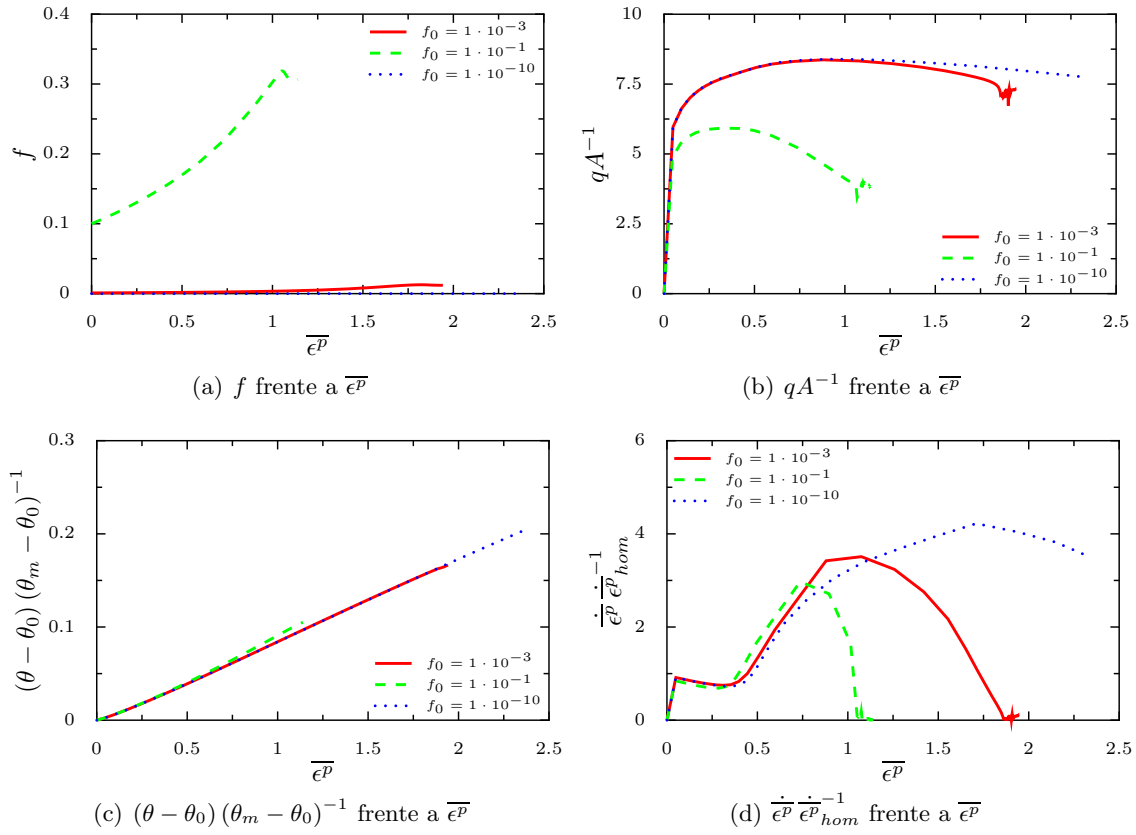


Figura 6.21: Comportamiento material obtenido en el escenario 6 ( $R = 50mm, V = 450ms^{-1}$ )

### 6.3.3.8. Inestabilidad

En este apartado se estudia el comienzo de la inestabilidad en el anillo. Para ello se toman dos elementos del anillo, uno que se deforme de forma homogénea y otro en el que se localice la deformación. Una vez seleccionados estos elementos se obtiene la deformación plástica equivalente y se representa la localizada ( $\bar{\epsilon}^p_{loc}$ ) frente a la homogénea ( $\bar{\epsilon}^p_{hom}$ ). Gracias a esta representación se aprecia claramente el momento en el que se produce la inestabilidad, ya que se aprecia un repentino cambio, casi asintótico, en la curva.

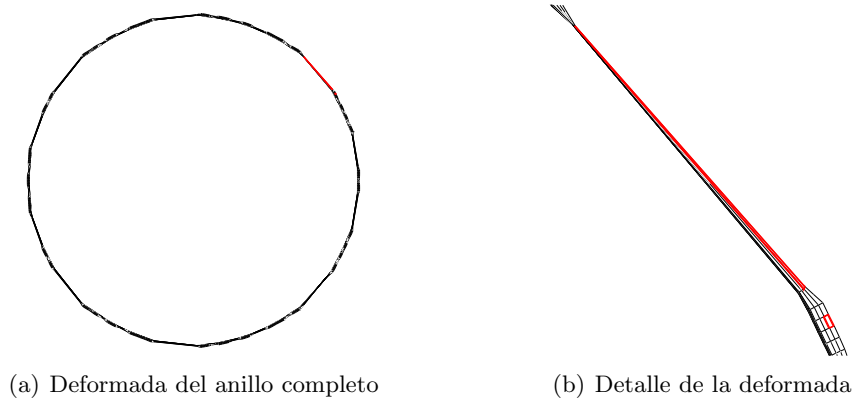
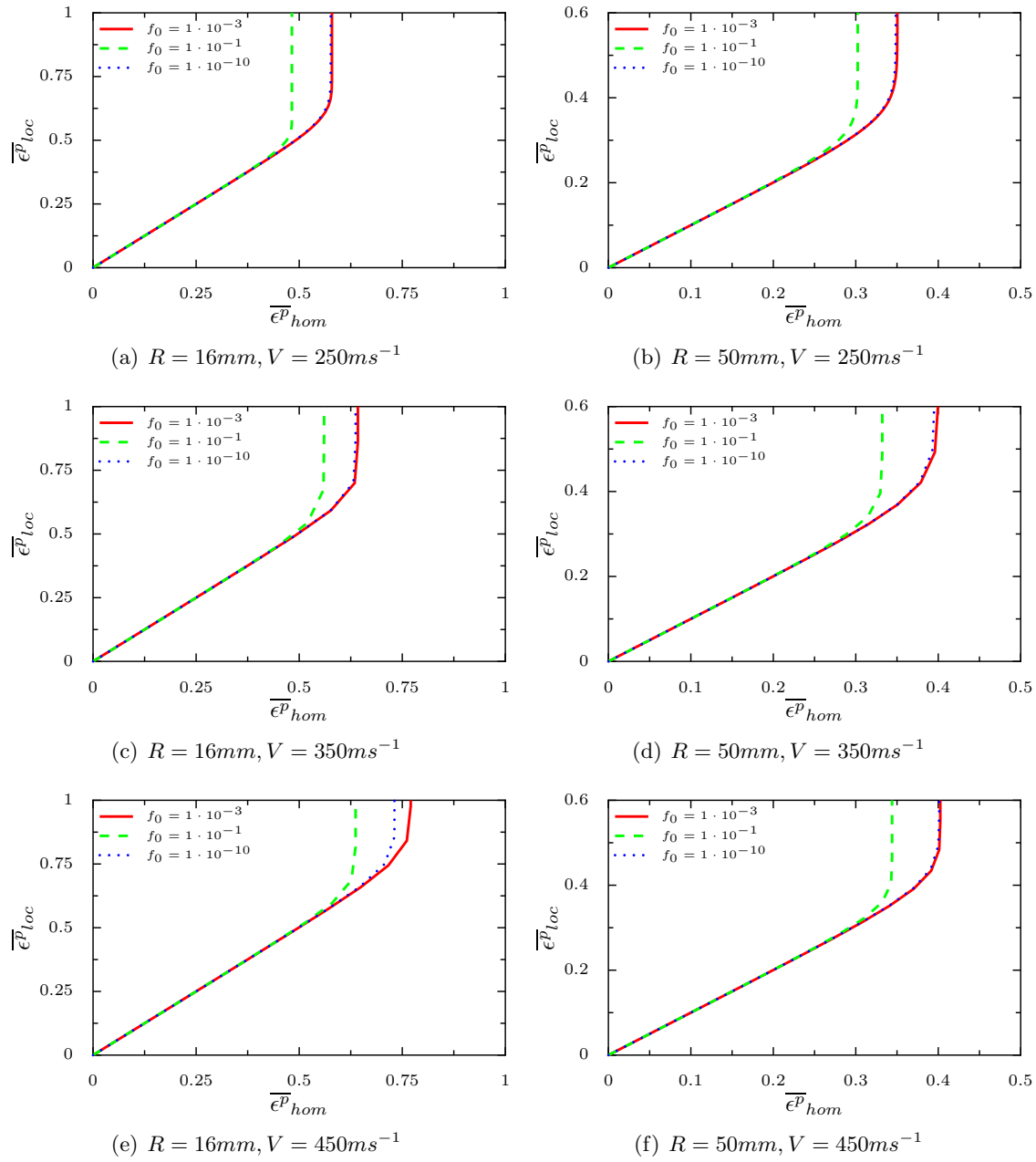


Figura 6.22: Elementos seleccionados para obtener  $\bar{\epsilon}^p_{loc}$  y  $\bar{\epsilon}^p_{hom}$

En la figura 6.22 se pueden ver los elementos seleccionados para la extracción de la deformación homogénea y localizada. La figura 6.22 b) muestra un detalle del anillo deformado para ver mejor como hay un elemento mucho más deformado que el otro.

La figura 6.23 contiene las gráficas obtenidas para estudiar la formación de inestabilidades. Gracias a la distribución de las gráficas se puede ver claramente como el comienzo de la inestabilidad se retrasa, hablando en términos de deformación plástica equivalente, a medida que aumenta la velocidad de expansión.

También se puede observar en la figura 6.23 como apenas hay diferencia entre los casos con  $f_0 = 1 \cdot 10^{-3}$  y  $f_0 = 1 \cdot 10^{-10}$ . En el caso con  $f_0 = 1 \cdot 10^{-1}$  siempre se produce antes la inestabilidad.

Figura 6.23:  $\overline{\epsilon}^p_{loc}$  frente a  $\overline{\epsilon}^p_{hom}$

### 6.3.3.9. Estudio de la evolución de la superficie de plastificación

En este apartado se estudia la evolución de la superficie de plastificación en un determinado elemento de una de las simulaciones. El caso elegido ha sido el anillo de  $16\text{mm}$  de radio interior, velocidad de expansión de  $250\text{ms}^{-1}$  y fracción de microvacíos inicial de 0,001.

En los metales, salvo excepciones, ante el incremento de la deformación plástica, la superficie de plastificación se expande debido al endurecimiento por deformación, lo que conlleva a que la región en la que el material se comporta de forma elástica aumente. Si, además, el metal bajo estudio presenta sensibilidad a la velocidad de deformación, este endurecimiento o expansión de la superficie de plastificación es aún mayor. Por otro lado, si el material presenta sensibilidad a la temperatura, ante un aumento de la misma, el material se ablandará o lo que es lo mismo, la superficie de plastificación se contraerá. Por último, si el material se caracteriza mediante el modelo de Gurson, un aumento de la fracción de microvacíos dará lugar a la contracción de la superficie de plastificación. En las simulaciones realizadas en este proyecto de fin de carrera se ha tenido en cuenta el endurecimiento por deformación y velocidad de deformación, así como el ablandamiento por temperatura a través de la ley de endurecimiento de Johnson Cook y el ablandamiento por la presencia de microvacíos a través del modelo de Gurson, por lo que la evolución de la superficie de plastificación es el resultado de dos efectos que compiten para obtener resultados opuestos:

- Por un lado el endurecimiento por deformación y por velocidad de deformación provoca una expansión de la superficie de plastificación.
- Por otro lado el aumento de la temperatura y de la fracción de microvacíos da lugar a una contracción de la superficie de plastificación.

El espacio de tensiones principales es una herramienta muy útil que permite ver de forma gráfica la evolución de un punto a lo largo de la simulación. Cuando se trabaja con plasticidad  $J_2$ , toda la información necesaria sobre la superficie de plastificación se encuentra en la coordenada  $\rho$  de Haigh-Westergaard, o lo que es equivalente, en la tensión equivalente de Von Mises ( $q$ ). En cambio, al estudiar el modelo de Gurson, es necesario incluir la tensión hidrostática (coordenada  $\xi$  de Haigh-Westergaard) para caracterizar totalmente el estado tensional de un punto. Por tanto, las representaciones del espacio de tensiones principales se presentan en el plano  $p$ - $q$  (ver apartado 2.2 para más detalles). En el plano  $p$ - $q$  las abscisas son valores de presión ( $p$ ) y las ordenadas de tensión equivalente ( $q$ ). Mediante el plano  $p$ - $q$  queda totalmente definido la evolución del punto estudiado

En las siguientes figuras se ha representado la evolución de un punto del anillo y la superficie de plastificación en cada uno de los instantes observados en el plano  $p-q$ . Las superficies de plastificación se presentan como un mapa de contornos en el que la magnitud que define su color es la fracción de microvacíos en ese instante. Además, para una mayor claridad en la presentación de los resultados, se ha dividido el tiempo de simulación en cuatro etapas. Los tiempos recogidos en cada una de las etapas se muestran en la tabla 6.5.

Tabla 6.5: Tiempo representado en cada etapa

Etapas	Tiempo inicial (s)	Tiempo final (s)
1	0	$0,5 \cdot 10^{-4}$
1	$0,5 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
1	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
1	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$

La figura 6.24 muestra los datos comentados previamente. En esta primera figura se pretende mostrar como se expande y se contrae la superficie de plastificación.

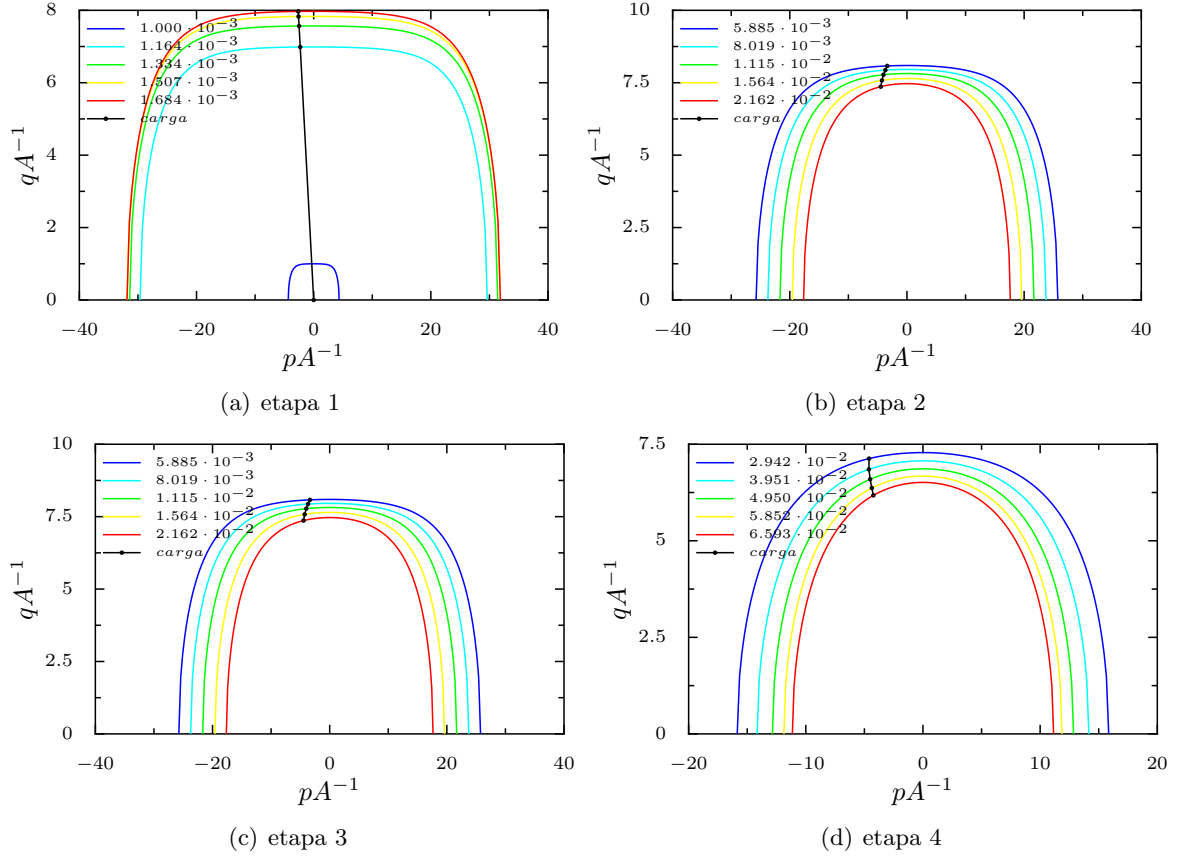


Figura 6.24: Evolución de un punto material en el espacio  $p-q$ . Superficies de plastificación



La figura 6.25 es un detalle de la figura 6.24. Se ha centrado el gráfico en la evolución del punto para apreciar como pasa de una superficie de plastificación a otra, siempre manteniéndose en ella, cumpliendo así la condición de consistencia.

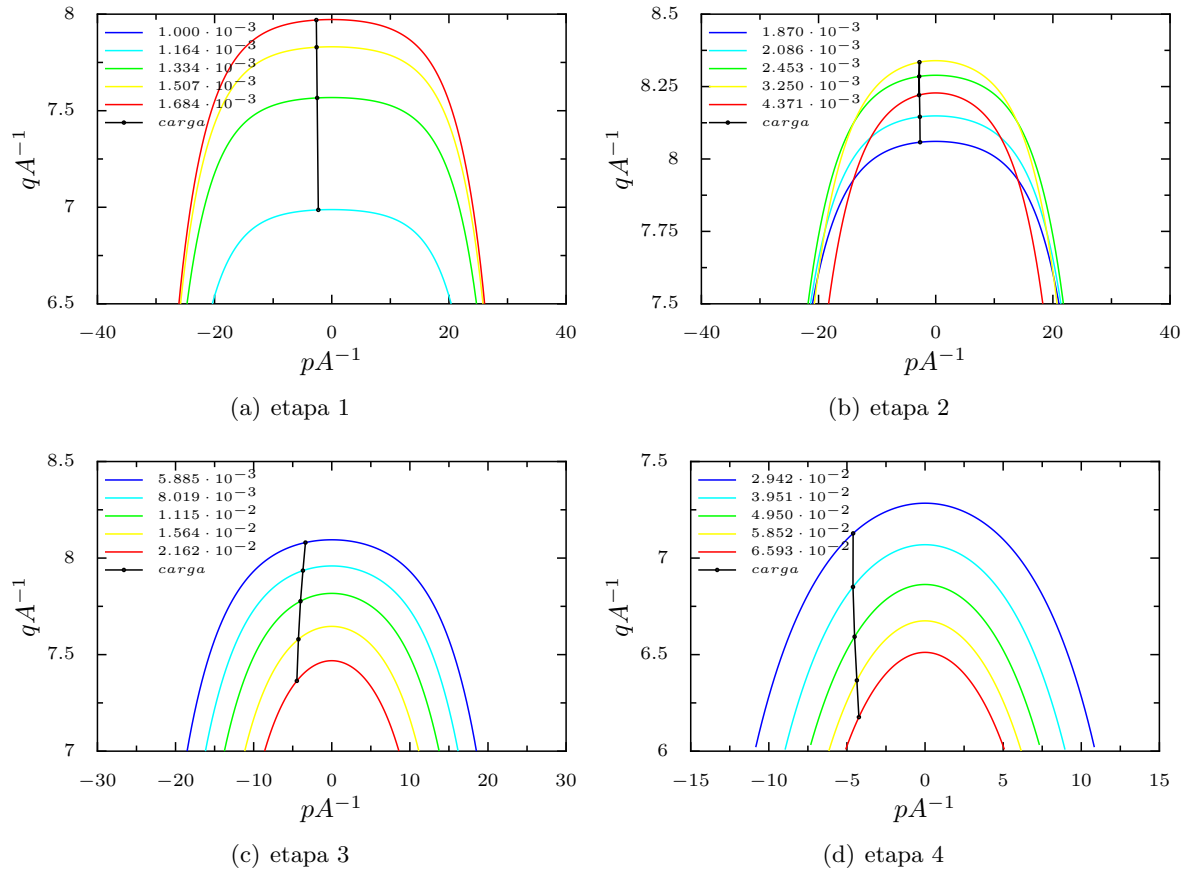


Figura 6.25: Detalle de la figura 6.24

### 6.3.3.10. Efecto de la triaxialidad

En este apartado se obtienen resultados que confirman la influencia de la triaxialidad en la evolución de la fracción de microvacíos. Para ello se han escogido dos elementos de dos simulaciones distintas. Las simulaciones son:

- Caso con  $R_i = 16mm$ ,  $V = 250ms^{-1}$  y  $f_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ .
- Caso con  $R_i = 50mm$ ,  $V = 450ms^{-1}$  y  $f_0 = 1 \cdot 10^{-1}$ .

Los elementos seleccionados pertenecen a una misma sección, y el criterio escogido es que tengan la triaxialidad más diferente posible. La figura 6.26 (a) muestra un mapa de contornos de una región del anillo para el caso con  $R_i = 50mm$ . Se puede ver como la triaxialidad es mayor en el exterior del anillo que en el interior. La figura 6.26 (b) muestra la sección de la que se han extraído los elementos en el caso con  $R_i = 50mm$ . El mapa de contornos y la selección de elementos en el caso con  $R_i = 16mm$  es similar. Los elementos seleccionados son los extremos de la línea media del anillo, el elemento 1 es el interior y el elemento 2 el exterior.

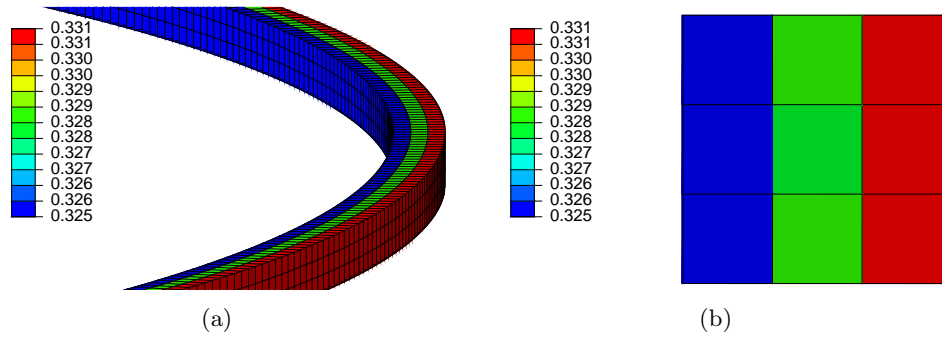


Figura 6.26: Contorno de triaxialidad ( $t = 6 \cdot 10^{-6}$ )

De estos elementos se ha obtenido la evolución de la triaxialidad y de la fracción de microvacíos frente a la deformación plástica equivalente. Estos datos se muestran en las figuras 6.27 y 6.28.

En la figura 6.27 se muestran los datos correspondientes al anillo con  $R_i = 16mm$ . Se puede ver como la pequeña diferencia entre los valores de triaxialidad se corresponde con una pequeña diferencia en la fracción de microvacíos.

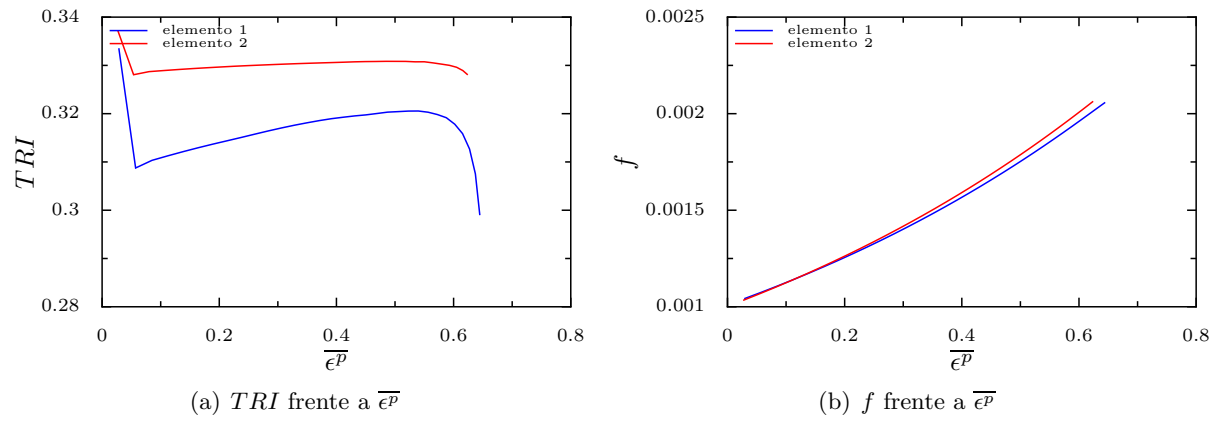


Figura 6.27: Influencia de la triaxialidad ( $R_i = 16mm$ ,  $V = 250ms^{-1}$ ,  $f_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ )

En el caso del anillo con  $R_i = 50mm$  mostrado en la figura 6.28 se puede ver como en la parte derecha de las gráficas, un repentino aumento en la diferencia de los valores de triaxialidad (hasta  $\bar{\epsilon}^p \approx 0,45$  esta diferencia era muy sutil) da lugar a un notable aumento en la diferencia en la fracción de microvacíos (al igual que con la triaxialidad, hasta  $\bar{\epsilon}^p \approx 0,45$ , la diferencia era muy sutil)

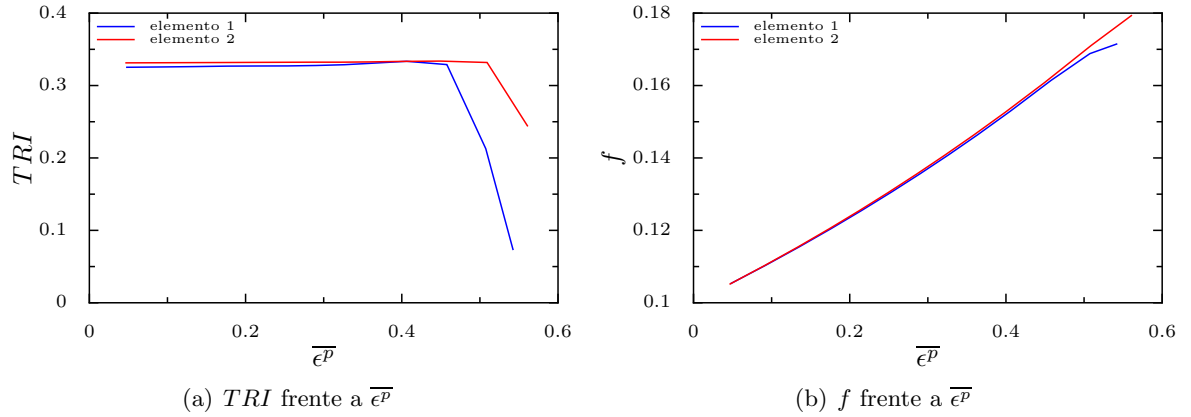


Figura 6.28: Influencia de la triaxialidad ( $R_i = 50mm$ ,  $V = 450ms^{-1}$ ,  $f_0 = 1 \cdot 10^{-1}$ )

En ambos casos se cumple que elemento con mayor triaxialidad es el que presenta un mayor crecimiento de fracción de microvacíos. Además, en el caso con  $R_i = 50mm$  se puede ver que un cambio repentino en la tendencia de la triaxialidad da lugar al esperado cambio en la tendencia de la fracción de microvacíos.

## Capítulo 7

# Conclusiones y trabajos futuros

Tras desarrollar la subrutina que caracteriza el modelo de Gurson y llevar a cabo una serie de simulaciones numéricas en las que se ha comprobado la eficiencia de la misma, se procede a concluir este proyecto de fin de carrera extrayendo los aspectos más importantes de los resultados y proponiendo nuevas vías de estudio.

### 7.1. Conclusiones

A continuación se comentan los principales resultados y conclusiones que se derivan de este proyecto de fin de carrera.

- Se ha implementado un algoritmo de resolución de las ecuaciones constitutivas del modelo de Gurson por métodos semi-implícitos. El resultado es una subrutina que obtiene solución para problemas termoviscoplasticos altamente eficiente, aspecto de gran importancia ante la continua búsqueda de optimización de procesos en la industria.
- Se han analizado distintas configuraciones del ensayo de expansión de anillos, concluyendo que el número de fragmentos en que queda dividido el anillo no presenta dependencia con la fracción de microvacíos inicial hasta un valor, aproximadamente  $f_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ , a partir del cual el número de fragmentos disminuye a medida que aumenta la fracción de microvacíos inicial.

- De las simulaciones realizadas se han extraído datos de elementos aislados para observar la dependencia de algunas propiedades mecánicas con la fracción de microvacíos inicial. La resistencia del material se ve claramente afectada por la presencia de microvacíos en el material, dando lugar a una notable reducción de la capacidad resistiva del material al aumentar el valor inicial de la misma. De forma similar, el crecimiento de la fracción de microvacíos presenta una gran dependencia con la fracción de microvacíos inicial. Por el contrario, la temperatura se ve muy levemente influenciada por la fracción de microvacíos inicial, apreciándose pequeñas diferencias sólo en los casos con valores muy elevados ( $f_0 = 1 \cdot 10^{-1}$ ).
- Se ha estudiado la formación de inestabilidades en el anillo. Se ha concluido que, hablando en términos de deformación plástica equivalente, el aumento de la velocidad de expansión retrasa la inestabilidad y que un aumento de la fracción de microvacíos inicial considerable, la adelanta. Entre los casos con  $f_0 = 1 \cdot 10^{-3}$  y  $f_0 = 1 \cdot 10^{-10}$  apenas hay diferencias en la formación de inestabilidades.
- De una de las simulaciones realizadas se ha extraído la evolución de la superficie de plastificación representada en el espacio  $p - q$  para un elemento. En esta evolución se puede ver la dilatación de la misma por los fenómenos de endurecimiento y la contracción por los fenómenos de ablandamiento y de presencia de daño en forma de microvacíos.
- En dos de las simulaciones realizadas se ha analizado la influencia de la triaxialidad en el crecimiento de la fracción de microvacíos. Para ello, de cada simulación, se han escogido dos elementos con distinta triaxialidad. Los resultados, sutiles pero consistentes, muestran que a mayor triaxialidad, mayor crecimiento de microvacíos.

## 7.2. Trabajos futuros

Algunas de las líneas que se pueden abordar como continuación de este proyecto de fin de carrera son:

- Modificación de la subrutina para implementar el modelo de Gurson completo (modelo GTN), en el cual se tiene en cuenta no sólo el crecimiento de microvacíos existentes, si no también la nucleación y la coalescencia.
- Implementación de distintas leyes de endurecimiento en el modelo, analizando la influencia de las mismas en las propiedades mecánicas obtenidas.

## Apéndice A

# Conceptos básicos

Dado un tensor de tensiones

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Se pueden obtener sus invariantes

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (\text{A.2})$$

$$I_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \quad (\text{A.3})$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) \quad (\text{A.4})$$

A partir de sus invariantes, se pueden obtener sus tensiones principales, que son los autovalores de  $\boldsymbol{\sigma}$ . Para ello se resuelve la ecuación

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \beta \mathbf{1}) = 0 \quad (\text{A.5})$$

La solución dará tres valores para  $\beta$ , cada uno de ellos es una tensión principal, de forma que:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (\text{A.6})$$

Si se obtiene el tensor de tensiones en sus direcciones principales da lugar a la ecuación A.7

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Se define la tensión hidrostática como:

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} \quad (\text{A.8})$$

Por convenio, se define la presión como

$$p = -\sigma_m \quad (\text{A.9})$$

El tensor desviador de tensiones como:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{1} \quad (\text{A.10})$$

Por definición, el primer invariante del tensor desviador de tensiones es nulo. El segundo invariante del tensor desviador de tensiones es:

$$J_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \right) + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)} \quad (\text{A.11})$$

La tensión equivalente de Von Mises es igual al segundo invariante del tensor desviador de tensiones:

$$q = J_2 \quad (\text{A.12})$$



# Referencias

- [1] Z. L. Zhang. *A complete Gurson Model*. Nonlinear Fracture and Damage Mechanics, WIT Press Southampton, UK, 2001: 223-248.
- [2] Weck, A. *The role of coalescence on ductile fracture*. McMaster University, Ontario, (Canadá), <http://mse.mcmaster.ca/graduate/courses/702/index.html>, 2005.
- [3] Stefan Josef Hiermaier. *Structures under crash and impact*. Springer, 2007
- [4] Hill, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, New York, 1950.
- [5] Mises, R. v. *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*. Nachr. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 582-592, 1913.
- [6] Tresca, H. *Mémoires sur l'écoulement des corps solides soumis à des fortes pressions*. C. R. Acad. Sci. Paris, 59: 754-758.
- [7] J. Skrzypek, A. Ganczarski. *Modeling of Material Damage and Failure of Structures: Theory and Applications*. Springer, 1999
- [8] Gurson, A. L. *Plastic Flow and Fracture Behaviour of Ductile Materials Incorporating Void Nucleation, Growth And Coalescence, PhD Dissertation*. Brown University, 1975.
- [9] G. Vadillo, R. Zaera, J. Fernández-Sáez. *Consistent integration of the constitutive equations of Gurson materials under adiabatic conditions*. Computer Methods in applied mechanics and engineering, November 2007
- [10] A. Rusinek, R. Zaera. *Finite element Simulation of steel ring fragmentation under radial expansion*. International Journal of Impact Engineering, 2005
- [11] Issam Doghri. *Mechanics of Deformable Solids. Linear and Nonlinear, Analytical and Computational Aspects*. Springer, 2000.

- 
- [12] N. Aravas. *On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, vol. 24, 1395-1416(1987).
- [13] Taylor, G. I. *Testing of Materials at High Rates of Loading*. Journal of the Institute of Civil Engineers 26: 486-518, 1946.
- [14] D. E. Grady, D. A. Benson. *Fragmentation of Metal Rings by Electromagnetic Loading*. 1982
- [15] T. von Karman, P. Duwez, Journal of applied Physics. 21, 987, 1950
- [16] Xiaoyu Hu, Glenn S. Daehn, *Effect of velocity on flow localization in tension*. Acta Mater 1996;44:1021-33.
- [17] Marina Altynova, Xiaoyu Hu, Glenn S. Daehn. *Increased Ductility in High Velocity Electromagnetic Ring Expansion*. Metallurgical and Material Transactions, Volume 27, 1996
- [18] Rajendran, A. M. y Fyfe, I.M.. *Inertia Effects on the Ductile Failure of Thin Rings*. Journal of Applied Mechanics, 49, 31, 1982.
- [19] Triantafyllidis N, Waldenmyer JR. *Onset of necking in electro magnetically formed rings*. J Mech.Phys Solids 2004;52:2127-48.
- [20] Raúl Muñoz Sánchez. *Integración de las ecuaciones constitutivas de un modelo termoviscoplastico por métodos implícitos: implementación en código de elementos finitos*. Proyecto de fin de máster, Universidad Carlos III de Madrid, 2008.
- [21] Vadillo, G. *Modelos de fractura dúctil en condiciones estáticas y dinámicas*. Tesis Doctoral Departamento de mecánica de medios continuos y teoría de estructuras, Universidad Carlos III de Madrid, 2007
- [22] Niordson, F.I.. *A Unit for Testing Materials at High Strain Rates*. Experimental Mechanics, 5 (1), 29-32, Jan 1965
- [23] Mustafa Resit Usal, Ergün Korkmaz, Melek Usal. *Constitutive Equations for an Elastic Media with Micro-voids*. Journal of Applied Sciences 6(4): 843-853, 2006
- [24] Fionn Dunne, Nik Petrinic. *Introduction to Computational Plasticity*. Oxford, 2005.
- [25] ABAQUS/Explicit v6.7.1, User's Manual, ABAQUS Inc., Richmond USA